複素グラスマン空間やユニタリ群上の大対蹠集合とデザインについて *

栗原 大武 †

北九州工業高等専門学校 総合科学科

概要

球面上の北極と南極のような「極対的な点のペア」の概念は，Chen–Nagano によって対称空間上で対蹠集合として一般化された．対蹠集合の中でも最もサイズ大きいものを大対蹠集合と呼ぶ．大対蹠集合は，空間上に “きれいに” 散らばっている点配置と考えられる．本講演ではデザインの言葉を用いて複素グラスマン空間上の大対蹠集合をとあるデザインの中でも最小サイズをもつものとして特徴づける．

また，最後にこの結果に関連した最新の話題についても触れることにする．

1 対蹠集合

M を連結なコンパクト対称空間とし，各点 $x \in M$ に対して，x 上の点対称を s_x とする．対蹠集合の概念は 1988 年に Chen–Nagano [1] によって導入された．

定義 1.1. M の部分集合 S が

$$\forall x, y \in S,\ s_x(y) = y$$

を満たすときに，S を**対蹠集合**と呼ぶ．

任意のコンパクトリーマン対称空間 M の 1 点からなる部分集合 $\{x\}$ は自明な対蹠集合である．また自明な例以外で対蹠集合の簡単な例を挙げるならば，球面 S^{n-1} 上の北極と南極のような極対的な点のペア $\{x, -x\}$ $(x \in S^{n-1})$ である．

M はコンパクトであり，各 $x \in M$ は s_x の孤立固定点であるので，対蹠集合のサイズは必ず有限になることがわかる．対蹠集合の中でもこの最大のサイズを持つ対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ．上で挙げた球面 S^{n-1} 上の北極と南極のような極対的な点のペアは大対蹠集合である．

M が対称空間の中でも性質の良い ‘対称 R 空間 *1’ であることを仮定すると，M の中の大対蹠集合は以下のような性質を持つ:

事実 1.2 (Sánchez [4], Tanaka–Tasaki [5])**.** $M \cong G/K$ を対称 R 空間とする．このとき次が成り立つ．

(1) 任意の極大な対蹠集合は大対蹠集合である．つまり任意の対蹠集合 S_0 に対して，$S_0 \subset S$ なる大対蹠集合 S が存在する．

(2) 大対蹠集合は G 作用によって移り合う同型を除き一意的である．つまり，2 つの大対蹠集合 S, S' に対して $S' = gS$ なる $g \in G$ が存在する．

---

* 部分多様体論・湯沢（2013 年 11 月 22 日）

† E-mail : kurihara@kct.ac.jp

*1 対称 R 空間について以下のことが知られている：対称 R 空間はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形になり，逆にコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間になる．

なお，後述の複素グラスマン空間は対称 R 空間であることが知られている．

2 複素グラスマン空間上のデザイン

n, m を $n \geq 2m$ を満たす正整数とする．$\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}^n$ の m 次元部分空間からなる集合とする．$\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ を**複素グラスマン空間**と呼ぶ．複素グラスマン空間は対称空間であることが以下のようにして確かめられる．$\boldsymbol{a} \in \mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ を固定する．このとき，$\mathbb{C}^n$ は直和分解 $\mathbb{C}^n = \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a}^{\perp}$ を持つので各ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ に対して，$v = v_{\boldsymbol{a}} + v_{\boldsymbol{a}^{\perp}}$ なるベクトル $v_{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{a}$, $v_{\boldsymbol{a}^{\perp}} \in \boldsymbol{a}^{\perp}$ が一意に決まる．この分解から $\mathbb{C}^n$ の対合的自己同型写像

$$\tilde{s}_{\boldsymbol{a}}(v) = v_{\boldsymbol{a}} - v_{\boldsymbol{a}^{\perp}} \quad \text{for } v \in \mathbb{C}^n \tag{2.1}$$

が得られる．更に $\tilde{s}_{\boldsymbol{a}}$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上に点対称 $s_{\boldsymbol{a}}$ を引き起こす．これによって $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ は対称空間であることが確かめられた．$\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ はユニタリ群 $U(n)$ が可移に作用する等質空間であり，$\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}} \cong U(n)/(U(m) \times U(n-m))$ が成り立つ．

σ を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $U(n)$ 不変な Haar 測度として，$\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の連続関数 $f, g \in C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ に対して，内積を

$$(f, g) := \frac{1}{\sigma(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})} \int_{\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}} f \bar{g} \, d\sigma$$

で定める．このとき $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の関数空間には $U(n)$ が自然に作用しており，$C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ も $U(n)$ の表現になる．ここで $\mu \in P_m := \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \,|\, \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m \geq 0\}$ に対して，H_μ を $C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の $U(n)$ 部分空間の中でウエイト

$$(\mu_1, \ldots, \mu_m, 0, \ldots, 0, -\mu_m, \ldots, -\mu_1)$$

をもつ $U(n)$ の既約表現に同型なものとする．このとき，$\bigoplus_{\mu \in P_m} H_\mu$ は $L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の中に稠密に入っていることが確かめられる．

1977 年に Delsarte–Goetals–Seidel [2] は球面上のデザイン理論を与えた．この結果により，その後他の連続空間の場合にもデザイン理論が考えられてきた．例えば階数 1 のコンパクト対称空間上であれば，球面上とほぼ平行にデザイン理論が成り立つことが示された（Hoggar [6] など）．複素グラスマン空間上のデザインは階数 1 のコンパクト対称空間上と異なる性質を持つことが多く，まだ多くのことがわかっていない．以下で球面などのデザインの定義を少し拡張した複素グラスマン空間上のデザインの定義を与える．

定義 2.1. $\mathcal{T}$ を P_m の有限部分集合とする．このとき $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合 X が以下の条件をみたすときに X を $\mathcal{T}$ **デザイン**と呼ぶ：

$$\frac{1}{|X|} \sum_{a \in X} f(x) = \frac{1}{\sigma(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})} \int_{\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}} f \, d\sigma \qquad \forall f \in \bigoplus_{\mu \in \mathcal{T}} H_\mu.$$

3 複素グラスマン空間上の大対蹠集合とデザイン

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底とする．$I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の元を $\boldsymbol{a}_I := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_i \,|\, i \in I\}$ とする．このとき $S := \{\boldsymbol{a}_I \,|\, I \subset \{1, 2, \ldots, n\},\ |I| = m\}$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の大対蹠集合である．また $|S| = \binom{n}{m}$ であることが容易に分かる．

複素グラスマン空間上の大対蹠集合とデザインの関係について得られた結果を紹介する．

$$\mathcal{E} := \{(1^i, 0^{m-i}) \,|\, i = 0, 1, \ldots, m\} \subset P_m$$

とする．尚，$\bigoplus_{\mu \in \mathcal{E}} H_\mu$ は $U(n)$ の表現としてみると $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^m \mathbb{C}^n)$ と同型な空間である．

命題 3.1 (K.–Okuda)**.** X を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合とする．このとき次が成り立つ．

(1) 大対蹠集合 S は $\mathcal{E}$ デザイン.
(2) X が $\mathcal{E}$ デザインならば，$|X| \geq \binom{n}{m}$ が成り立つ.

この命題より大対蹠集合 S は $\mathcal{E}$ デザインの中で最もサイズの小さいものであることが分かる．しかし，サイズが $|X| = \binom{n}{m}$ である $\mathcal{E}$ デザインの構造は一意に決まらない．実際以下の様な $\mathcal{G}_{2,4}^{\mathbb{C}}$ の $\binom{4}{2} = 6$ 点からなる部分集合 X で大対蹠集合ではないが，$\mathcal{E}$ デザインとなる例が存在する：$X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_6\} \subset \mathcal{G}_{2,4}^{\mathbb{C}}$, where

$$\boldsymbol{x}_1 := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2\}, \quad \boldsymbol{x}_2 := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_3, e_4\}, \quad \boldsymbol{x}_3 := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_4\},$$
$$\boldsymbol{x}_4 := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_2, e_4\}, \quad \boldsymbol{x}_5 := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + \sqrt{-1}e_2, e_3\}, \quad \boldsymbol{x}_6 := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1 - \sqrt{-1}e_2, e_3\}.$$

命題 3.1 から，大対蹠集合は最小サイズをもつ $\mathcal{E}$ デザインであるが，逆は言えないことがわかった．しかし，デザインにもう少し条件を加えれば，大対蹠集合を最小サイズのデザインとして特徴づけることが出来る．今 P_m の部分集合として

$$\mathcal{F} := \{(2, 1^{i-1}, 0^{m-i}) \mid i = 2, 3, \ldots, m\} \subset P_m$$

とする.

定理 3.2 (K.–Okuda)**.** X を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合とする．このとき次が成り立つ.

(1) 大対蹠集合 S は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザイン.
(2) X が $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインならば，$|X| \geq \binom{n}{m}$ が成り立つ.
(3) 以下は同値：
    (1) X は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインかつ，$|X| = \binom{n}{m}$.
    (2) X は大対蹠集合.

つまり大対蹠集合は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインのなかでも最もサイズが小さいものであり，最後の主張は最小サイズの $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインが必ず大対蹠集合になるいうデザインからの大対蹠集合の特徴付けを与える．元々，対蹠集合は幾何的に定義されたものであり，大対蹠集合は対蹠集合の中でも最もサイズが大きくものとして定義されていたものであった．つまり，大対蹠集合は幾何的な立場からは最大性を持ち，他方でデザイン的な立場からは最小性を持ち，お互いの立場の丁度境界同士の交わりとして一意に定まるものであると言える.

4　ユニタリ群上の大対蹠集合とデザイン

前節までで複素グラスマン空間上の大対蹠集合を「最小サイズを持つあるデザイン」として特徴づける話をした．すると次にやるべきことは，他の体上でのグラスマン空間上の大対蹠集合とデザインの関係を調べる，また他の対称空間上の大対蹠集合とデザインの関係を調べる，などが挙げられるだろう．今後個別に同様の問題を考えるのはいい戦略とは言い難いので，出来れば一般論ができれば一番良い.

しかし，いきなり一般論を作り上げるのも容易ではないのでいくつかの具体例を計算しておきたい．再度，複素グラスマン空間の場合に立ち返ってみると，定理 3.2 の証明の多くの部分は，ユニタリ群のユニタリ表現を用いた．そこで複素グラスマン空間の次に考えやすいのは，複素グラスマン空間の "親玉" であるユニタリ群上の大対蹠集合であろう．この節では，ユニタリ群上の大対蹠集合とデザインについて得られたことを紹介する.

まずユニタリ群 $U(n)$ 上のデザインを複素グラスマン空間のとき同様に定義する．$U(n)$ 上の連続関数空間 $C(U(n))$ は $U(n)$ 表現と見れるので

$$\bigoplus_{\lambda \in (\mathbb{Z})_+^n} V_\lambda$$

と既約表現分解できる．但し $(\mathbb{Z})_+^n$ は n 個の整数の組 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ で $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ を満たすもの全体からなる集合であり，V_λ は最高ウエイト λ を持つ $U(n)$ の既約表現と同型な空間である.

定義 4.1. $\mathcal{T}$ を $(\mathbb{Z})_+^n$ の部分集合とする．このとき $U(n)$ の有限部分集合 X が以下の条件をみたすときに X を $\mathcal{T}$ **デザイン**と呼ぶ：

$$\frac{1}{|X|}\sum_{a\in X} f(x) = \frac{1}{\xi(U(n))}\int_{U(n)} f\, d\xi \qquad \forall f \in \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{T}} V_\lambda.$$

ただし ξ は $U(n)$ 上の $U(n)$ 不変な Haar 測度である．

この定義から定まる「あるデザイン」で $U(n)$ 上の大対蹠集合を特徴づけるというのがこの節の目標である．尚，$U(n)$ 上の大対蹠集合は $U(n)$ 変換を除いて

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \pm1 & & & 0 \\ & \pm1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad |S| = 2^n$$

と同型になることが知られている．

ユニタリ群上の大対蹠集合とデザインの関係はまだ完全に解明はしていないが，部分的に $n=2$ のとき解明したことをここで述べる．

$$\mathcal{T} := \{(k,l) \in (\mathbb{Z})_+^2 \mid k,l \text{ の片方が奇数で他方が偶数，若しくは } k,l \text{ の両方が奇数で } k=l\}$$

とする．

定理 4.2. X を $U(2)$ の有限部分集合とする．このとき次が成り立つ．

(1) 大対蹠集合 S は $\mathcal{T}$ デザイン．

(2) X が $\mathcal{T}$ デザインならば，$|X| \geq 4\ (= |S|)$ が成り立つ．

この結果から大対蹠集合 S は最小サイズの $\mathcal{T}$ デザインであることが分かる．しかし，逆に最小サイズの $\mathcal{T}$ デザインとして大対蹠集合を特徴づけることは出来ない．実際に $U(2)$ の部分集合として

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \overline{z_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z_1 & 0 \\ 0 & -\overline{z_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & -\overline{z_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_2} \end{pmatrix} \right\}, \quad (z_1,\, z_2 \text{ は絶対値 } 1 \text{ の複素数})$$

とすると X は最小サイズの $\mathcal{T}$ デザインであるが, $z_1 = z_2 = 1$ でない限り X は対蹠集合にならない．ここで注意したいことは $\mathcal{T}$ は大対蹠集合がデザインになりうる添字を全て集めてきた可算濃度の部分集合である．つまり，$n=2$ のとき，$U(2)$ 上の大対蹠集合は「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけることが出来ないことがわかった．

今後は「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけらないという現象は，$n=2$ の場合に特別起こりうることなのか，一般の n に対して成り立つことなのかを調べて行きたい．また，一般の対称空間に対しても，大対蹠集合が「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけられるものとそうでないものの分類を行いたい．

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano. A Riemannian Geometric Invariant and its Applications to a Problem of Borel and Serre. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**(1):273–297, 1988.

[2] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geom. Dedicata*, **6**(3):363–388, 1977.

[3] H. Kurihara and T. Okuda. Great antipodal sets of complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities. preprint, arXiv:1303.5936.

[4] C.U. Sánchez. *The index number of an R-space: an extension of a result of M. Takeuchi's*. Proc. Amer. Math. Soc., **125**(3): 893–900, 1997.

[5] M.S. Tanaka and H. Tasaki. Antipodal sets of symmetric R-spaces. *Osaka J. Math*, **50**(1): 161–169, 2013.

[6] S.G. Hoggar. t-designs in projective spaces. *European J. Combin.*, **3**(3):233–254, 1982.