例外型ルート系のワイル群

間下克哉

2014 年 11 月 23 日　越後湯沢

ルート系 R の元 α に対して，α に直交する超平面に関する鏡映を S_α で表す．$\{S_\alpha : \alpha \in R\}$ が生成する直交群の部分群 $W(R)$ を R のワイル群という．R の部分集合 R' がまたルート系であるとき，$\{S_\beta : \beta \in R'\}$ は $W(R)$ の部分群である．このような部分群をワイル部分群という．

ワイル群のすべての元を，ルートやウェイトに作用させた像の全体について知る必要が生じることがあるが，E 型単純ルート系のワイル群の位数は，E_6 で 51,840，E_7 で 2,903,040, E_8 で 696,729,600 と大きく計算機の利用が不可欠であると思われる．

古典型ルート系のワイル群は計算機を用いるときにも扱い易いので，E 型ルート系 R の部分ルート系 R' で古典型であるものをとって，$W(R)$ にワイル部分群 $W(R')$ による剰余類の代表元が求められれば，E 型ルート系のワイル群を計算機で扱うことが可能になる．また，対称対の各型ごとにワイル部分群による剰余類の代表元を求めることが必要になる場合もある．

E 型単純ルート系のワイル群について，適当なワイル部分群による剰余類の代表元を探して，その結果をもとにワイル群のすべての元の作用を計算機で行えるようになったので，そのことについて解説する．

1　ルート系とワイル群

まず，ルート系とワイル群について復習する．

$\mathbf{R}^n$ の内積を $\langle , \rangle$ で表す．$\mathbf{R}^n$ の有限部分集合 R が次の性質をもつとき，R は**ルート系**であるという．

*R*1)　すべての $\alpha,\ \beta \in R$ に対して $a_{\beta,\alpha} = \dfrac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbf{Z}$ がなりたつ．

*R*2)　すべての $\alpha,\ \beta \in R$ に対して $\beta - a_{\beta,\alpha}\alpha$ も R の元である．

*R*3)　α および $c\alpha$ がともに Δ の元であるならば $c = \pm 1$ である．

*R*1) および *R*2) により，$\alpha \in R$ に直交する超平面に関する鏡映 $S_\alpha(x) = x - \dfrac{2\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$ でルート系 R が不変であることがわかる．$\alpha \in R$ に直交する超平面に関する鏡映の全体が生成する直交群 $O(V)$ の部分群

$$W(R) = \langle S_\alpha : \alpha \in R \rangle \subset O(V)$$

をルート系 R の**ワイル群**という．

$R \subset \mathbf{R}^n$ をルート系とする．

$\mathbf{R}^n$ の，$\langle \alpha, H_0 \rangle \neq 0 \; \forall \alpha \in R$ を満たす元 H_0 を R の**正則元**という．正則元 H_0 を一つとって固定する．$\langle \alpha, H_0 \rangle > 0$ のとき α を**正ルート**といい，$\langle \alpha, H_0 \rangle < 0$ のとき α を**負ルート**という．R の正ルートの全体を R^+ で表すとき，$\alpha = \beta + \gamma \; (\beta,\ \gamma \in R^+)$ と表せない $\alpha \in R^+$ を**単純ルート**という．

$$\mathbf{R}^n \setminus \{H : \langle \alpha, H \rangle = 0 \text{ for some } \alpha \in R\}$$

の連結成分をワイル領域 (Weyl chamber) という．[1]

命題 1 $R \subset \mathbf{R}^n$ をルート系，Π を R の単純ルートの全体とし，W を R のワイル群とする．

(1) 単純ルートの全体を Π で表すとき，R^+ の元は Π の元の非負整数一次結合で表せる．

(2) 二つのルート $\alpha,\ \beta$ のなす角を θ とするとき $\cos^2 \theta = 0,\ 1/4,\ 1/2,\ 3/4$

(3) $\alpha,\ \beta \in \Pi$ のとき $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$

(4) ワイル群 $W(R)$ は，単純ルート $\alpha_i \in \Pi$ に対して定まる鏡映 S_{α_i} により生成される．

(5) ワイル群はワイル領域全体のなす集合に単純推移的に作用する．

Π の元の個数を，ルート系 R の**階数** (rank) という．Π の階数は，Π が張る $\mathbf{R}^n$ の部分空間の次元と等しい．R の，空でない部分集合 R_1，R_2 で

$$R = R_1 \cup R_2, \quad R_1 \cap R_2 = \emptyset, \quad R_1 \perp R_2$$

を満たすものが存在するとき R は**可約**であるといい，可約でないとき既約であるという．

例 $e_1,\ \cdots,\ e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底とし，$H_0 = e_1 + \cdots + e_n$ とする．

A_{n-1} **型ルート系：** $\{\pm(e_i - e_j)\ (1 \leq i \leq j \leq n)\}$
単純ルートの全体は $\{e_i - e_{i+1}\ (1 \leq i \leq n-1)\}$ である．$e_i - e_{i+1}$ に直交する超平面に関する鏡映は，e_i と e_{i+1} を交換する直交変換だから，ワイル群は対称群 $\mathcal{S}_n$ に同型である．

B_n **型ルート系：** $\{\pm e_i \pm e_j\ (1 \leq i \leq n),\ \pm e_i\ (1 \leq i \leq n)\}$
単純ルートの全体は $\{e_i - e_{i+1}\ (1 \leq i \leq n-1),\ e_n\}$ である．e_i に直交する超平面に関する鏡映は，e_i を (-1) 倍する直交変換だから，ワイル群は $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n \rtimes \mathcal{S}_n$ に同型である．

D_n **型ルート系：**: $\{\pm e_i \pm e_j\ (1 \leq i \leq n)\}$
単純ルートの全体は $\{e_i - e_{i+1}\ (1 \leq i \leq n-1)$ である．また，ワイル群は $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{n-1} \rtimes \mathcal{S}_n$ に同型である．

[1] 正ルート，負ルート，単純ルートは正則元 H_0 の対して定まったが，実は H_0 を含むワイル領域に依って定まる．

2　剰余類の代表元

$R \subset \mathbf{R}^n$ をルート系とし，R の部分集合 R' もルート系であるとする．R および R' のワイル群を，それぞれ $W(R)$，$W(R')$ で表すことにすると，明らかに $W(R')$ は $W(R)$ の部分群である．

かんたんのために R と R' の階数が等しいとする．

R の正則元 H_0 は R' の正則元である．H_0 を含む R のワイル領域を $\mathcal{C}$ とし，H_0 を含む R' のワイル領域を $\mathcal{C}'$ とすると，$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ である．

R' のワイル群 $W(R')$ の元の全体を $\{u_1, \cdots, u_k\}$ として $u_i(\mathcal{C}') = \mathcal{C}'_i$ とおくと，命題 1(5) により，$u_i \mapsto \mathcal{C}'_i$ は $W(R')$ とワイル領域全体の間の全単射である．

$W(R)$ の元で，H_0 の像が $\mathcal{C}'$ に含まれるものの全体を w_j $(j = 1, \cdots, l)$ とする．i，j を，それぞれ $1 \leq i \leq k$，$1 \leq j \leq l$ を満たす整数として $u_i(w_j(H_0))$ を含む R のワイル領域を $\mathcal{C}_{i,j}$ とおくと，整数の組 (i, j) と (i', j') が異なるとき $\mathcal{C}_{i,j} \cap \mathcal{C}_{i',j'} = \emptyset$ で，$\{\mathcal{C}_{i,j} \ : \ 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq l\}$ が R のワイル領域の全体に一致することが容易にわかる．

3　E_6 型ルート系

E_6 型ルート系のワイル群の適当な部分群による右剰余類分解の代表元を求めるための準備として E_6 のルート系について復習しておく．

$e_1, \cdots, e_8$ を $\mathbf{R}^8$ の標準基底とし

$$\mathfrak{a} = \{H \in \mathbf{R}^8 \ : \ \langle H, e_6 + e_8 \rangle = \langle H, e_7 + e_8 \rangle = 0\}$$

の部分集合

$$R(E_6) = \left\{ \begin{array}{l} \pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i < j \leq 5), \\ \pm \dfrac{1}{2} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} (-1)^{s_i} e_i + (-e_6 - e_7 + e_8) \right) \quad (\displaystyle\sum_{i=1}^{5} s_i \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)) \end{array} \right\}$$

は既約ルート系で

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8 \right), \\ &\alpha_2 = e_1 + e_2,\ \alpha_3 = e_2 - e_1,\ \alpha_4 = e_3 - e_2, \\ &\alpha_5 = e_4 - e_3,\ \alpha_6 = e_5 - e_4 \end{aligned}$$

はその基本ルート系である．これを E_6 型ルート系という．$R(E_6)$ のワイル群を $W(\mathfrak{e}_6)$ で表す．

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 \\ &= \frac{1}{2} \left(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8 \right) \end{aligned}$$

である．

E_6 型ルート系の部分集合

$$R' = R(D_5) = \{\pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i < j \leq 5)\}$$

は D_5 型ルート系である．R' の元が定める超平面に関する鏡映が生成する $W(E_6)$ の部分群を $W(D_5)$ で表すと，$W(D_5)$ は $W(E_6)$ の部分群になっている；

$$W(E_6) = \{S_\alpha : \alpha \in R(E_6)\} \supset W(D_5) = \{S_\alpha : \alpha \in R(D_5)\}$$

$W(E_6)$ の位数は 51,840，$W(D_5)$ の位数は 1,920 だから

$$\#(W(D_5) \backslash W(E_6)) = 27$$

である．

$R(E_6)$ の単純ルート α_i $(1 \le i \le 6)$ に対して $\langle \alpha_i, H_0 \rangle = 2$ を満たす元

$$H_0 = 2e_2 + 4e_3 + 6e_4 + 8e_5 - 8e_6 - 8e_7 + 8e_8$$

を含む E_6 のワイル領域を $\mathcal{C}_{E_6}$ とし，D_5 のワイル領域 $\mathcal{C}_{D_5}$ を次のものとする．

$$\mathcal{C}_{D_5} = \left\{ \sum_{i=1}^{8} h_i\, e_i \ : \ h_1 + h_2 \ge 0, h_5 \ge h_4 \ge h_3 \ge h_2 \ge h_1 \right\}$$

4 $W(D_5) \backslash W(E_6)$ の代表元

右剰余類 $W(D_5) \backslash W(E_6)$ の代表元を求めるプログラムの概略について述べる．
計算時間の短縮を考えて C 言語でプログラムを作成した．

(1) ベクトルは整数の配列として表現されているものとする．例えば，正則元 H_0 の宣言は次のように行う；

```
static int H0[8] = { 0, 2, 4, 6, -8, -8, 8 };
```

(2) $W_1 = W(D_5)$（位数 1920）とおく．
W_1 の作用は，$\mathfrak{a}$ の元 $v = (v_1, \cdots, v_8)$ に対して

- $\mathcal{S}_5$:　$v_1, \cdots, v_5$ の置換 (120 個)
- $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$:　$v_1, \cdots, v_5$ のうちの偶数個を (-1) 倍する (16 個)

の積だから， 整数 i と配列 v を渡して呼び出すと，v に $W(D_5)$ の i 番目の元を作用させた結果が返る関数

```
void act_WD5( int i, vector v );
```

は容易に作成できる．

(3) $R \setminus R'$ の元が定める超平面に関する鏡映の全体（16 個）を W_2 とする．
W_2 についても (2) と同様の関数

```
void act_refl( int i, vector v );
```

を作成する．

(4) H_0 の $W(E_6)$ の元による像で $\mathcal{D}_{D_5}$ に含まれるものを登録する表を 2 次元配列 `int dwt[27][8]` [2]として宣言しておく．以下 g は W_2 の元 h は W_1 の元を表すものとする．

- $H' = g_{i_1}(H_0)$ $(1 \leq i_1 \leq 16)$ が $W(D_5)\backslash W(E_6)$ に含まれ，H' が `dwt` になければ新たに登録する．
- $H' = h_{i_2}(g_{i_1}(H_0))$ $(1 \leq i_1 \leq 16,\ 1 \leq i_2 \leq 1920)$ が $W(D_5)\backslash W(E_6)$ に含まれ，H' が `dwt` になければ新たに登録する．
- 以下，順にループのネストを深くしていき，`dwt` に登録した元の個数が剰余類の個数 27 に達すれば終了とする．

実際に C 言語でプログラムを作成して右剰余類の代表元を求めることができているが紙数の都合から結論は省略する．代わりに，H_0 の像で $\mathcal{D}_{D_5}$ に含まれるもののリストを付録として末尾に記載した．

5 ワイル部分群による剰余類の代表元

$\mathfrak{g}$ を，E 型コンパクト例外リー環とし，σ を $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型とする．また，$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}$ とおく．このとき，$\mathfrak{g}$ および $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ の (ルート系の) ワイル群を $W(\mathfrak{g})$，$W([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}])$ で表すと，その位数および商は以下の表のとおりである．

前節では，$EIII$ 型の場合に，右剰余類 $W([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}])\backslash W(\mathfrak{e}_6)$ の代表元を求めた．EII 型の場合の代表元は，前節の結果をもとに $\mathfrak{e}_6$ のワイル群のすべての元の作用を計算機で行えるようにし，$w \in W(\mathfrak{e}_6)$ で $w(H_0)$ が $\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$ の支配的ウェイトになるものを求めればよい．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_7$ のときは，まず，EVI 型について剰余類の代表系を求め，それをもとに EV 型および $EVII$ 型について剰余類の代表系を求めた．$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$ のときは，まず，$EVIII$ 型について剰余類の代表系を求め，それをもとに EIX 型について剰余類の代表系を求めた．

いずれの場合も計算結果は省略する．

Type	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	$\#W(\mathfrak{g})$	$\#W([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}])$	
EI	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{sp}(4)$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^7 \cdot 3$	135
EII	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	36
$EIII$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{so}(10) \oplus \mathbf{R}$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^7 \cdot 3 \cdot 5$	27
EIV	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{f}_4$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^7 \cdot 3^2$	45
EV	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{su}(8)$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	72
EVI	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$	63
$EVII$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathbf{R}$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	56
$EVIII$	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{so}(16)$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	$2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	135
EIX	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	$2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	120

表 1:

[2] 27 は $W(D_5)\backslash W(E_6)$ の剰余類の個数，8 は $\mathfrak{a}$ の次元

σ が外部自己同型のとき（表 1 の EI 型及び EIV 型），$\mathfrak{k}$ の極大部分環は $\mathfrak{g}$ の極大部分環 $\mathfrak{a}$ の真部分集合であり $\mathfrak{k}$ のルート系は $\mathfrak{g}$ の部分ルート系ではない．したがって $\mathfrak{k}$ の元 α に対して，α に直交する $\mathfrak{a}$ の超平面に関する鏡映が $W(\mathfrak{g})$ の元であるとは限らない．

実際には，$\mathfrak{k}$ の単純ルートに直交する $\mathfrak{a}$ の超平面に関する鏡映が $W(\mathfrak{e}_6)$ の元であることが確認できたので，以下にそのことを述べる．

$\mathfrak{a}$ の線形同型 φ を

$$\varphi(\alpha_1) = \alpha_6,\ \varphi(\alpha_2) = \alpha_2,\ \varphi(\alpha_3) = \alpha_5,\ \varphi(\alpha_4) = \alpha_4,\ \varphi(\alpha_5) = \alpha_2,\ \varphi(\alpha_6) = \alpha_1$$

で定める．φ を拡張した，$\mathfrak{e}_6$ の外部自己同型も φ で表す．

$\mathfrak{a}'$ を，$\mathfrak{a}$ の φ 不変部分空間とし，π を $\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{a}'$ への直交射影とする．

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_2 = e_1 + e_2 \\
\beta_2 &= \alpha_4 = -e_2 + e_3 \\
\beta_3 &= \pi(\alpha_3) = (1/2)\ (-e_1 + e_2 - e_3 + e_4) \\
\beta_4 &= \pi(\alpha_1) = (1/4)\ (e_1 - e_2 - e_3 - 3e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8) \\
\beta_5 &= \alpha_3 - \pi(\alpha_3) = (1/2)\ (-e_1 + e_2 + e_3 - e_4) \\
\beta_6 &= \alpha_1 - \pi(\alpha_1) = (1/4)\ (e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - 3e_5 - e_6 - e_7 + e_8)
\end{aligned}$$

とおく．β_1，$\cdots$，β_4 は $\mathfrak{a}'$ の基底で β_5，β_6 は $\mathfrak{a}'^{\perp}$ の基底である．

命題 2 (1)　$S_1 = S_{\alpha_2}$，$S_2 = S_{\alpha_4}$，$S_3 = S_{\alpha_3} \circ S_{\alpha_5}$，$S_4 = S_{\alpha_1} \circ S_{\alpha_5}$ とおく．$\{S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4\}$ が生成する，ワイル群 $W(\mathfrak{e}_6)$ の部分群は $\mathfrak{f}_4$ のワイル群に同型である．これを $W(\mathfrak{f}_4)$ で表す．
(2)　$W(\mathfrak{e}_6)$ の，$X = \{\pm 2\beta_5,\quad \pm\beta_6,\quad \pm(\beta_5 + \beta_6)\}$ を保存する元全体のなす部分群は $W(\mathfrak{f}_4)$ と一致する．

命題 3 (1)　$S_1 = S_{\alpha_4}$，　$S_2 = S_{\alpha_3} \circ S_{\alpha_5}$，　$S_3 = S_{\alpha_1} \circ S_{\alpha_6}$，　$S_4 = S_{\alpha_2} \circ S_{\alpha_4} \circ S_{\alpha_3} \circ S_{\alpha_5} \circ S_{\alpha_4} \circ S_{\alpha_2}$ とおく．$\{S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4\}$ が生成する，ワイル群 $W(\mathfrak{e}_6)$ の 部分群は $\mathfrak{sp}_4$ のワイル群 $W(\mathfrak{sp}(4))$ と同型である．これを $W(\mathfrak{sp}(4))$ で表す．
(2)　$W(\mathfrak{e}_6)$ の，

$$X = \{\pm\alpha_4,\ \pm(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5),\ \pm(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6),\ \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)\}$$

を保存する元全体のなす部分群は $W(\mathfrak{sp}(4))$ と一致する．

6 付録： 右剰余類の代表元による H_0 の像

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrl}
(& -1, & 3, & 5, & 7, & 9, & -7, & -7, & 7 &) \\
(& -3, & 5, & 7, & 9, & 11, & 3, & 3, & -3 &) \\
(& 0, & 2, & 4, & 10, & 12, & -4, & -4, & 4 &) \\
(& 1, & 3, & 5, & 9, & 13, & -3, & -3, & 3 &) \\
(& 2, & 4, & 6, & 10, & 12, & -2, & -2, & 2 &) \\
(& 0, & 2, & 6, & 8, & 14, & -2, & -2, & 2 &) \\
(& 1, & 3, & 7, & 9, & 13, & -1, & -1, & 1 &) \\
(& 0, & 2, & 8, & 10, & 12, & 0, & 0, & 0 &) \\
(& -1, & 3, & 5, & 7, & 15, & -1, & -1, & 1 &) \\
(& 0, & 4, & 6, & 8, & 14, & 0, & 0, & 0 &) \\
(& -1, & 3, & 7, & 9, & 13, & 1, & 1, & -1 &) \\
(& 0, & 2, & 6, & 8, & 10, & -6, & -6, & 6 &) \\
(& -2, & 4, & 6, & 10, & 12, & 2, & 2, & -2 &) \\
(& 1, & 3, & 5, & 9, & 11, & -5, & -5, & 5 &) \\
(& 2, & 4, & 6, & 8, & 12, & -4, & -4, & 4 &) \\
(& 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & -3, & -3, & 3 &) \\
(& 0, & 2, & 4, & 6, & 8, & -8, & -8, & 8 &) \\
(& 0, & 2, & 4, & 6, & 8, & 8, & 8, & -8 &) \\
(& 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 7, & 7, & -7 &) \\
(& 0, & 2, & 6, & 8, & 10, & 6, & 6, & -6 &) \\
(& -1, & 3, & 5, & 9, & 11, & 5, & 5, & -5 &) \\
(& -2, & 4, & 6, & 8, & 12, & 4, & 4, & -4 &) \\
(& 0, & 2, & 4, & 6, & 16, & 0, & 0, & 0 &) \\
(& 1, & 3, & 5, & 7, & 15, & 1, & 1, & -1 &) \\
(& 0, & 2, & 6, & 8, & 14, & 2, & 2, & -2 &) \\
(& -1, & 3, & 5, & 9, & 13, & 3, & 3, & -3 &) \\
(& 0, & 2, & 4, & 10, & 12, & 4, & 4, & -4 &)
\end{array}
$$