極小 R 空間上の面積最小錐

首都大学東京大学院理工学研究科博士後期課程
大野　晋司

1　導入

Euclid 空間に一般化された Plateau 問題の解は, 一般に特異点を許容する整カレントとして得られる. 面積最小部分多様体の特異点が錐状特異点であるとき, 接モデルとなる接錐はまた面積最小となる. 面積最小部分多様体の特異点の近傍の挙動を調べるためには, 面積最小錐の研究が基本的になる. 本研究では面積非増加レトラクションを構成する方法によって, 球面に極小に埋め込まれた R 空間上の錐の面積最小性について調べた. 本講演は首都大学東京の酒井高司氏との共同研究に基づく.

$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を単位球面とし, B を S^{n-1} のコンパクト部分多様体とする. このとき

$$C_B = \{tx \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t,\ x \in B\}$$

$$C_B^1 = \{tx \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq 1,\ x \in B\}$$

と定義し, C_B を B 上の錐と呼ぶ. $C_B,\ C_B^1$ はともに原点において唯一の孤立特異点を持つ.

定義 1 *C_B^1 が, B を境界に持つ整カレントの中で面積最小であるとき, C_B は面積最小であるという.*

定義 2 *可微分レトラクション $\Phi : \mathbb{R}^n \to C_B$ が面積非増加であることを, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ において, Φ の Jacobian が $J(d\Phi)_x \leq 1$ となることで定義する.*

次の命題が成り立つ.

命題 1 *B を S^{n-1} のコンパクト部分多様体とする. このとき, 面積非増加レトラクション $\Phi : \mathbb{R}^n \to C_B$ が存在するならば, C_B は面積最小錐である.*

2　面積非増加レトラクションと極小 R 空間上の錐の面積最小性

(G, K) をコンパクト型の対称対とし, $M = G/K$ に G 不変 Riemann 計量を一つ定めると, M は対称空間となる. M の原点 o における接空間 T_oM 内の超球面を S とする. $A \in S$ を通る線型イソトロピー表現 (s 表現) の軌道 $\mathrm{Ad}(K)A$ は S の部分多様体になり, R 空間と呼ばれる. s 表現の軌道空間は Weyl 領域 $\mathcal{C}$ の閉包 $\overline{\mathcal{C}}$ で表される. M の制限ルート系 R の基本系 F を, $F = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ とし, 部分集合 $\Delta \subset F$ に対して, $\mathcal{C}^\Delta = \{H \in \overline{\mathcal{C}} \mid \langle \lambda, H \rangle > 0\ ({}^\forall \lambda \in \Delta)\ , \langle \mu, H \rangle = 0\ ({}^\forall \mu \in F \setminus \Delta)\}$ と定める.

定理 1 ([2]) *空でない任意の部分集合 $\Delta \subset F$ に対して, 唯一つ $A \in \mathcal{C}^\Delta \cap S$ が存在して, $\mathrm{Ad}(K)A$ は S の極小部分多様体になる.*

各 $\Delta \subset F$ に対して得られる極小 R 空間上の錐に対して, 次の補題 1 と定理 2 によって錐へのレトラクションが構成される. 定理 2 は, [1] で示されたレトラクションの構成定理の拡張である.

補題 1 ([1]) 任意の部分集合 $\Delta \subset F$ について $\phi(\mathcal{C}^{\Delta}) \subset \overline{\mathcal{C}^{\Delta}}$ を満たすような写像 $\phi : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}$ に対して, 写像 $\Phi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}\,; \Phi(X) = \mathrm{Ad}(k)\phi(H)$ が矛盾なく定義される. ただし, $k \in K,\ H \in \overline{\mathcal{C}}$ であり, $X = \mathrm{Ad}(k)H$ を満たす.

定理 2 $A \in \overline{\mathcal{C}}$ に対して, $\Delta = \{\alpha \in F \mid \langle \alpha, A\rangle > 0\}$ と定める. C^1 級関数 $f : \overline{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が

(1) 任意の $t \geq 0$ に対して, $f(tA) = t$

(2) Δ を含まない F の任意の部分集合 Δ' について, $f|_{\mathcal{C}^{\Delta'}} = 0$

を満たすとき, $\phi : \overline{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\cdot A$ を, $\phi(x) = f(x)A$ で定め, $\Phi : \mathfrak{m} \to C_{\mathrm{Ad}(K)A}$ を $\Phi(X) = \mathrm{Ad}(k)\phi(H)$ と, 補題 1 のように定める. この時, Φ は $C_{\mathrm{Ad}(K)A}$ への可微分レトラクションとなる. 更に, 任意の $x \in \mathcal{C}$ に対して, $J(d\Phi)_x \leq 1$ であれば, Φ は面積非増加レトラクションになる.

このように構成されたレトラクションの Jacobian は以下のように計算される.

命題 2 任意の $x \in \mathcal{C}$ に対して,

$$J(d\Phi)_x = \|(\mathrm{grad} f)_x\| \prod_{\lambda \in R_+ \setminus R_+^{\Delta}} \left(\frac{\langle \lambda, A\rangle}{\langle \lambda, x\rangle} f(x) \right)^{m(\lambda)}$$

ただし, $m(\lambda)$ は正の制限ルート $\lambda \in R_+$ の重複度で, $R_+^{\Delta} = \{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, A\rangle = 0\}$.

本研究では, 関数 f を具体的に与え, 定理 2 によって構成される Φ の Jacobian $J(d\Phi_x)$ を評価することにより, 対称 R 空間とは限らないいくつかの極小 R 空間上の錐の面積最小性を示した.

定理 3 階数 2 の既約な対称空間の s 表現の孤立軌道上の錐の中で面積最小となるものを決定した.

定理 4 対称空間 SU(10)/Sp(5) *(*A_3 型, $m = 4$*)* の s 表現の $A^{\{\lambda_1, \lambda_3\}}$ を通る軌道上の錐は面積最小である.

2 つの極小 R 空間 $M_i = \mathrm{Ad}(K_i)A_i\ (i = 1,\ 2)$ を考える. $k_i = \dim M_i$ とし $k = k_1 + k_2$ とおく. このとき, $M = \sqrt{\frac{k_1}{k}}M_1 \times \sqrt{\frac{k_2}{k}}M_2$ は極小 R 空間になる.

定理 5 各 i に対して, 関数 f_i と定理 *2* によって C_{M_i} への面積非増加レトラクションが構成され, さらに,

$$\prod_{\lambda \in R_{i+} \setminus R_{i+}^{\Delta_i}} \left(\frac{\langle \lambda, A_i\rangle}{\langle \lambda, x\rangle} f_i(x_i) \right)^{m(\lambda)} \leq 1$$

が満たされるとする. このとき, $k_1 \geq 3$ かつ $k_2 \geq 3$ ならば M 上の錐 C_M への面積非増加レトラクションが構成される. したがって C_M は面積最小である.

参考文献

[1] D. Hirohashi, T. Kanno and H. Tasaki, *Area-minimising of the cone over symmetric R-spaces*, Tsukuba J. Math. **24** (2000), no. 1, 171–188.

[2] D. Hirohashi, H. Tasaki, H. J. Song and R. Takagi, *Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type*, Differential Geom. Appl. **13** (2000), no. 2, 167–177.