コンパクトリーマン対称空間の対蹠集合について

東京理科大学理工学研究科数学専攻 2 年　鈴木絢人

リーマン多様体 M がリーマン対称空間であるとは, M の各点 p に対して点対称とよばれる対合的等長変換で p が孤立固定点となるものが存在することである. リーマン対称空間 M の対蹠集合とは, その集合の元同士は互いに点対称で固定される集合のことであり, M の対蹠集合の位数の上限を M の 2-number という. 2-number を与える対蹠集合を M の大対蹠集合という. 今回特殊直交群 $SO(n)$ の 2-number と大対蹠集合について考察したので紹介する.

定義 1. M をリーマン対称空間とし, s_p を点 $p \in M$ における点対称とする. M の部分集合 A が**対蹠集合**であるとは, 任意の 2 点 $a, b \in A$ に対して $s_a(b) = b$ が成立することである. M の対蹠集合の位数の上限を 2-number といい $\sharp_2 M$ と表す. 2-number は有限である ([3]). 2-number を与える対蹠集合を M の**大対蹠集合**という.

対蹠集合の概念は Chen-Nagano によって [1] で導入された. 一般に非コンパクト型リーマン対称空間の 2-number は 1 であることが知られている.

例 1. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | |x| = 1\}$ の任意の点 x に対して, $\{x, -x\}$ は S^n の大対蹠集合である.

補題 1. G をコンパクトリー群とする. G の任意の対蹠集合 A と任意の $g \in G$ に対して, $L_g(A), R_g(A), A_g(A)$ は G の対蹠集合である. ここで L_g を g による G の左移動, R_g を g による G の右移動, A_g を g による G の内部自己同型写像とする.

補題 2. G をコンパクトリー群とする．G の任意の対蹠集合 A に対して，ある $g \in G$ が存在して，$L_g(A)$ は単位元を含む対蹠集合となる．

補題 3. G をコンパクトリー群とし，A を G の単位元を含む対蹠集合とする．
(1) 任意の $a \in A$ に対して，$a = a^{-1}$ である．
(2) A の任意の 2 つの元は互いに可換である．

補題 4. G をコンパクトリー群とすると，G の単位元を含む大対蹠集合は G の可換部分群である．

命題 1. $\sharp_2 SO(n) = 2^{n-1}$ である．

上の命題を証明する過程で次のことが証明できた．

命題 2. (1) $X := \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \in SO(n) \right\}$ は $SO(n)$ の大対蹠集合である．
(2) $SO(n)$ の任意の対蹠集合に対して，その対蹠集合を含む $SO(n)$ の大対蹠集合が存在する．
(3) $SO(n)$ の単位元を含む任意の大対蹠集合は (1) の X と共役である．

この命題 2 の類似はより一般に対称 R 空間と呼ばれるコンパクトリーマン対称空間で成り立つことが知られている．詳しくは [3] を参照して頂きたい．

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., 308(1988), 273–297.

[2] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Amer. Math. Soc., 2001.

[3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math., 50(2013), 161–169.