外的対称空間の極大トーラスと子午空間

田中 真紀子（東京理科大学）

1 Introduction

2011 年から Augsburg 大学の Eschenburg 先生、Quast さんと共同でコンパクト外的対称空間の鏡映部分多様体の研究を始めた。コンパクト外的対称空間は、対称 R 空間を線形イソトロピー軌道として実現したものと見なせる。また、Riemann 多様体 M の鏡映部分多様体とは、M の対合的等長変換による不動点集合の連結成分のことで、M の全測地的部分多様体である。対称 R 空間の鏡映部分多様体は対称 R 空間であるか、という問題が我々の研究の出発点である。Leung によるコンパクト型既約 Riemann 対称空間の鏡映部分多様体の分類によると、対称 R 空間が既約 Riemann 対称空間の場合には、その鏡映部分多様体はすべて対称 R 空間になっている。既約でない場合も含めて成立するだろうとの予想のもと、分類によらない証明を試みているが、まだ解決には至っていない。今回の結果は、その研究過程で得られたものである。

2 外的対称空間と鏡映部分多様体

M を $\mathbb{R}^n$ の部分多様体とする。M の連結性は常に仮定する。M の各点 $x \in M$ におけるアフィン法空間 $x+(T_xM)^\perp$ に関する $\mathbb{R}^n$ の鏡映 s_x で M が保たれるとき、M は**外的対称 (extrinsically symmetric)** であるという。ここで、s_x は $s_x(x) = x$ を満たす $\mathbb{R}^n$ のアフィン写像で、$x+(T_xM)^\perp$ において $(T_pM)^\perp$ の元は固定し、$x+T_xM$ において T_xM の元は -1 倍する。外的対称部分多様体は誘導計量に関して Riemann 対称空間になる。実際、s_x の M への制限が x における M の点対称を定める。

例えば、$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は外的対称である。各点 $x \in S^n$ において、x におけるアフィン法空間 $x + (T_xS^n)^\perp$ に関する鏡映 s_x は、$\mathbb{R}^{n+1}$ の 1 次元部分空間 $\langle x\rangle_{\mathbb{R}}$ に関する $\mathbb{R}^{n+1}$ の鏡映であり、S^n が保たれることがわかる。

コンパクト Riemann 対称空間 M は、あるコンパクト型 Riemann 対称空間 G/K の線形イソトロピー軌道 $M = \mathrm{Ad}(K)\xi \subset \mathfrak{p}$ として実現できるとき**対称 R 空間**とよばれる。ここで、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の標準分解、$\xi(\neq 0) \in \mathfrak{p}$ は $\mathrm{ad}(\xi)^3 = -\mathrm{ad}(\xi)$ を満たす。$\mathfrak{g}$ の Killing 形式から定まる内積により $\mathfrak{p}$ をユークリッド空間とみなし、$M = \mathrm{Ad}(K)\xi \subset \mathfrak{p}$ を対称 R 空間 M の**標準埋め込み**とよぶ。

Ferus は [3], [4] で、対称 R 空間の標準埋め込みは外的対称であり、コンパクト外的対称部分多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$ が full（すなわち、$m < n$ なる m に対して $M \not\subset \mathbb{R}^m$）ならば、対称 R 空間の標準埋め込みであることを示した。

以下では、外的対称部分多様体を誘導計量により Riemann 対称空間と見なしたものを**外的対称空間**とよぶことにする。

$M \subset \mathbb{R}^n$ を外的対称空間とする。$\mathbb{R}^n$ の対合的線形等長同型 $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が $\tau(M) = M$ を満たすとき、不動点集合 $F(\tau, M) := \{p \in M \mid \tau(p) = p\}$ の連結成分を**外的鏡映部分空間**とよぶ。τ の M への制限は M の対合的等長変換であるから、外的鏡映部分空間は M の鏡映部分多様体である。

定理 2.1 ([2])**.** $M \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト外的対称空間とし、N を M の外的鏡映部分空間とする。このとき、ある線形部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$N \subset V$ は外的対称空間となる。

(証明) M はコンパクトなので $M \subset S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ と仮定しても一般性を失わない。$\tau \in O(n), \tau^2 = E_n$ (n 次単位行列), $\tau(M) = M$ とする。N を $F(\tau, M)$ の連結成分とする。$V_\pm$ をそれぞれ τ の固有値 ± 1 に対する固有空間とすると、直和分解 $\mathbb{R}^n = V_+ \oplus V_-$ を得る。このとき、$N \subset V_+$ である。M は外的対称であるから、任意の $p \in M$ に対して、p における点対称 s_p は $\widetilde{s_p} \in O(n)$ に拡張できる。$p \in N$ ならば、$\tau(p) = p$ より $\tau \circ s_p = s_{\tau(p)} \circ \tau = s_p \circ \tau$ が M 上で成立する。したがって、$\mathbb{R}^n$ 上で $\tau \circ \widetilde{s_p} = \widetilde{s_p} \circ \tau$ が成り立ち、$\widetilde{s_p}(V_\pm) = V_\pm$ (複合同順) が成り立つ。$V_+^\pm$ をそれぞれ V_+ における $\widetilde{s_p}$ の固有値 ± 1 に対する固有空間とすると、$V_+^+ = V_+ \cap N_pM$ および $V_+^- = V_+ \cap T_pM$ が成立する。さらに、$T_pN = V_+^-$ が成り立つ。したがって、V_+ における $p \in N$ でのアフィン法空間に関する鏡映は s_p の V_+ への制限に一致し、N は M の全測地的部分多様体であるから、N は s_p で保たれる。よって $N \subset V_+$ は外的対称である。 $\square$

注意 2.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ が full ならば、$N \subset V_+$ も full である。

$M \subset \mathbb{R}^n$ が外的対称空間のとき、もし、M の対合的等長変換 φ が $\mathbb{R}^n$ の対合的線形等長同型 $\tilde{\varphi}$ に拡張できれば、定理 2.1 により φ により定義される M の鏡映部分多様体 N に対して、$N \subset F(\tilde{\varphi}, \mathbb{R}^n)$ は外的対称空間になる。したがって、$M \subset \mathbb{R}^n$ が対称 R 空間の標準埋め込みの場合に、M の任意の等長変換 φ が $\mathbb{R}^n$ の線形等長変換 $\tilde{\varphi}$ に拡張できれば、特に φ が対合的なときには、φ により定義される M の鏡映部分多様体 N に対して $N \subset F(\tilde{\varphi}, \mathbb{R}^n)$ は full なコンパクト外的対称空間になり、Ferus の結果からこれは対称 R 空間の標準埋め込みとなる。つまり、「対称 R 空間の鏡映部分多様体は対称 R 空間である」ことが従う。このことから、コンパクト外的対称空間 $M \subset \mathbb{R}^n$ の任意の等長変換が $\mathbb{R}^n$ の線形等長同型に拡張できるか、という問題が肯定的に解決できれば、我々の当初の問題も肯定的に解決できることになる。

一般に、Riemann 対称空間 M の等長変換群 $I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ は、点対称で生成される。$M \subset \mathbb{R}^n$ が外的対称空間の場合、任意の点対称は $\mathbb{R}^n$ の線形等長同型に拡張できることから、$I_0(M)$ の元は $\mathbb{R}^n$ の線形等長同型に拡張できることがわかる。$I(M) - I_0(M)$ の元については未解決である。しかし、特別な場合に次の結果を得た。

定理 2.3 ([2])**.** M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、半単純 Lie 群 G に対して $M = \mathrm{Ad}(G)J \subset \mathfrak{g}$ を M の随伴軌道としての実現とする。ただし、$\mathfrak{g}$ は G の Lie 環で、$J(\neq 0) \in \mathfrak{g}$ は $\mathrm{ad}(J)^3 = -\mathrm{ad}(J)$ を満たす。このとき、M の任意の等長変換は $\mathfrak{g}$ の線形等長同型に拡張できる。

既知の結果ではあるが、定理 2.3 の系として次を得る。

系 2.4. コンパクト型既約 Hermite 対称空間の鏡映部分多様体は対称 R 空間である。

3 極地と子午空間

$M = G/K$ をコンパクト Riemann 対称空間とする。ここで、G は M の等長変換群の単位連結成分であり、K は M の点 o におけるイソトロピー部分群である。点 o における M の点対称 s_o による不動点集合 $F(s_o, M)$ を

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

と連結成分の直和として表す。連結成分 M_j^+ $(0 \leq j \leq r)$ を M の o に関する**極地 (polar)** とよぶ。点対称の定義から o は s_o の孤立不動点なので、$M_0^+ = \{o\}$ と定めることにする。一般に、極地が一点だけからなる場合には、その極地（またはその点）を**極 (pole)** ともよぶ。p が o の極であるための必要十分条件は $s_o = s_p$ が成り立つことである。

任意の $p \in M$ は $g \in I_0(M)$ に対して $p = go$ と表せる。このとき $F(s_p, M) = gF(s_o, M)$ が成り立ち、p に関する極地は o に関する極地と G 合同である。したがって、原点 o に関する極地のみを考えれば十分である。

M_j^+ の点 p に対して $F(s_p \circ s_o, M)$ の点 p を含む連結成分を M_j^- で表し、M_j^+ に対する**子午空間 (meridian)** とよぶ。極地が K 軌道であることから、$p' \in M_j^+$ に対して、$p' = kp$ となる $k \in K$ が存在する。このとき $F(s_{p'} \circ s_o, M) = kF(s_p \circ s_o, M)$ が成り立ち、p' に対して定まる子午空間と p に対して定まる子午空間は K 合同である。したがって、極地 M_j^+ に対応する子午空間を考える際には、M_j^+ のどの点で考えても一般性を失わない。

M_j^+ および M_j^- は M の全測地的部分多様体であり、誘導計量に関して Riemann 対称空間である。点 p において、M_j^+ と M_j^- の接ベクトル空間は互いに直交補空間であり、$\dim M_j^+ + \dim M_j^- = \dim M$ が成り立つ。特に、極地 M_j^+ が極でない極

地の場合には、$\dim M_j^- < \dim M$ となることに注意しておく。長野 [6] は、コンパクト既約 Riemann 対称空間 M が、極地と子午空間の組で決まることを示した。

コンパクト Riemann 対称空間 M の階数 $\mathrm{rank}(M)$ とは、M の極大トーラスの次元のことである。

定理 3.1 ([1]). コンパクト Riemann 対称空間 M の任意の子午空間 M_j^- に対して、$\mathrm{rank}(M_j^-) = \mathrm{rank}(M)$ が成り立つ。

（証明）M の点 o と、s_o の不動点 $p \in M$ に対して、M_j^- は $F(s_p \circ s_o, M)$ の p を含む連結成分である。このとき、M の閉測地線 $c(t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ で、$c(0) = c(2\pi) = o, c(\pi) = p$ を満たすものが存在する。さらに、$c(t)$ を含む M の極大トーラス A を取ることができる。A の極地はすべて極であり、A 上で $s_o = s_p$ が成り立つので、$A \subset M_j^-$ となり、A は M_j^- の極大トーラスである。[1] $\square$

また、定理 2.1 より次を得る。

定理 3.2 ([2]). $M \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト外的対称空間とし、$o \in M$ とする。o における点対称 s_o の $\mathbb{R}^n$ への拡張を $\widetilde{s_o}$ で表す。このとき、o に関する極地 M_j^+ に対して、$M_j^+ \subset F(\widetilde{s_o}, \mathbb{R}^n)$ は外的対称空間であり、$p \in M_j^+$ に対して定まる子午空間 M_j^- に対して、$M_j^- \subset F(\widetilde{s_o} \circ \widetilde{s_p}, \mathbb{R}^n)$ は外的対称空間である。特に、対称 R 空間の極地と子午空間は対称 R 空間である。

4　主結果

コンパクト外的対称空間 $M \subset \mathbb{R}^n$ の等長変換が $\mathbb{R}^n$ の線形等長同型に拡張できるか、という問題の解決へのアプローチの一つとして、M が対称 R 空間であることから、対称 R 空間についての Loos の結果に着目し、それを応用できないかと考えた。

Loos [5] は、対称 R 空間の極大トーラスが直交トーラス、すなわち、S^1 の Riemann 積であることを示した。この事実は、[7], [8] において、コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉が対蹠集合になることの証明の中でも用いた。

Loos の証明は、対称 R 空間の接ベクトル空間が Jordan triple system の構造を持つことを利用している。今回、我々は、対称 R 空間を標準埋め込みにより外的対称空間とみなし、子午空間の性質を利用することによって、次の定理の別証明を与えた ([2])。

定理 4.1 ([5]). $M \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト外的対称空間とする。このとき、M の極大トーラスは直交トーラスである。

証明には、次の定理 4.2 と定理 4.3 を用いる。

[1] 京都工芸繊維大学の井川治さんの助言によりオリジナルの証明を簡略化することができた。

定理 4.2 ([2])**.** M をコンパクト Riemann 対称空間とする。このとき、M の極地がすべて極ならば、M はいくつかの球面と平坦トーラスの Riemann 積である。

定理 4.3 ([2])**.** $M \subset \mathbb{R}^n$ を外的対称空間で、M は k 個の球面 $S_1, \ldots, S_k$ と平坦トーラス F の Riemann 積 $S_1 \times \cdots \times S_k \times F$ に等長的であるとする。このとき、M の極大トーラスは直交トーラスである。

定理 4.3 の証明は k に関する帰納法で行う。定理 4.2 の証明には以下の結果を用いる。

補題 4.4. M をコンパクト型 Riemann 対称空間とする。このとき、M の極地がすべて極ならば、M は単連結である。

系 4.5. M をコンパクト Riemann 対称空間とする。このとき、M の極地がすべて極ならば、M は単連結コンパクト型 Riemann 対称空間と平坦トーラスの Riemann 積である。

補題 4.6. M を単連結コンパクト型既約 Riemann 対称空間とする。このとき、M の極地がすべて極ならば、M は球面である。

定理 4.2 の証明は次の通りである。系 4.5 より、M は、単連結コンパクト型 Riemann 対称空間 Y と平坦トーラス F の Riemann 積 $M = Y \times F$ である。トーラスの極地はすべて極であるから、M の極地がすべて極であるためには、Y の極地がすべて極であることが必要十分条件である。Y の極地がすべて極ならば、補題 4.6 により Y の既約因子は球面である。したがって、M はいくつかの球面とトーラスの Riemann 積である。

補題 4.6 の証明には次の補題 4.7 を用いる。

補題 4.7. V を有限次元実ベクトル空間とし、V^* を V の双対空間とする。$\Sigma \subset V^*$ を既約ルート系で $\Sigma \neq A_1$ とする。$\delta \in \Sigma$ を最長ルートとする。$H \in V$ が $\langle H, \mathrm{Ker}\delta \rangle = 0$ かつ $\delta(H) = 2$ を満たすとする。このとき、次が成り立つ。

$$\{\pm 1, \pm 2\} \subset \{\alpha(H) \mid \alpha \in \Sigma\} \subset \{0, \pm 1, \pm 2\}.$$

定理 4.1 の証明は以下の通りである。$M \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト外的対称空間とすると、M は誘導計量に関して Riemann 対称空間である。M について、次の (A), (B) のいずれかが成り立つ。

(A) M の極地はすべて極である。
(B) M には極でない極地が存在する。

(A) のときは、定理 4.2 により M はいくつかの球面とトーラスの Riemann 積である。したがって、定理 4.3 より M の極大トーラスは直交トーラスである。

(B) のときは、極でない極地 M_j^+ に対する子午空間 M_j^- は $\dim M_j^- < \dim M$ を満たす。$\mathrm{rank}(M_j^-) = \mathrm{rank}(M)$ より、M_j^- の極大トーラスは M の極大トーラスでもあるので、M_j^- の極大トーラスが直交トーラスであることが言えればよい。

定理 2.1 により、$p \in M_j^+$ に対して、$M_j^- \subset F(\widetilde{s_o} \circ \widetilde{s_p}, \mathbb{R}^n)$ は外的対称である。したがって、M_j^- の極地がすべて極ならば、(A) の場合の議論が適用でき、M_j^- の極大トーラスは直交トーラスであることがわかる。M_j^- に極でない極地が存在する場合には、その極地に対応する子午空間について上記の議論を繰り返す。このとき、有限回の繰り返しで (A) の場合に帰着される。以上により、M の極大トーラスが直交トーラスであることが結論できる。 □

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II, Duke Math. J. **45** (1978), 405–425.

[2] J.-H. Eschenburg, P. Quast and M. S. Tanaka, Maximal tori of extrinsic symmetric spaces and meridians, to appear in Osaka J. Math.

[3] D. Ferus, Immersions with parallel second fundamental form, Math. Z. **140** (1974), 87–93.

[4] D. Ferus, Symmetric submanifolds of Euclidean space, Math. Ann. **247** (1980), 81–93.

[5] O. Loos, Charakterisierung symmetrischer Räume durch ihre Einheitsgitter, Math. Z. **189** (1985), 211–226.

[6] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces II, Tokyo J. Math. **15** (1992), 39–82.

[7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 1297–1332.

[8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type", preprint.