極大対蹠的部分集合の系列

田崎博之

部分多様体論・湯沢 2013

昨年度の湯沢 2012 では「有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合」という題名で有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の対蹠集合の分類問題が、次に述べるある有限集合の部分集合の族の分類に帰着し、$k \leq 4$ の場合に分類を完成させたことを話した。今回の講演ではその後の進展について解説する。

1 から n までの自然数の集合 $\{1, \ldots, n\}$ 内の元の個数が k の部分集合の全体を $P_k(n)$ で表す。集合 X の元の個数を $\#X$ で表すと

$$P_k(n) = \{\alpha \subset \{1, \ldots, n\} \mid \#\alpha = k\}$$

である。$P_k(n)$ の元 α, β の差集合 $\alpha - \beta = \{x \in \alpha \mid x \notin \beta\}$ の元の個数が偶数であるとき、α, β は**対蹠的**であるという。$P_k(n)$ の部分集合 A の任意の二元が対蹠的であるとき、A を**対蹠的**という。論文 [1] では有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の分類問題が、$P_k(n)$ 内の極大対蹠的部分集合の分類問題に帰着することを示し、$k \leq 4$ の場合に $P_k(n)$ 内の極大対蹠的部分集合の分類を完成させた。今後、極大対蹠的部分集合 (maximal antipodal subset) を MAS と略記する。これらの結果をまとめた論文 [1] にはいくつかの MAS の系列も示したが、さらにその後これらの MAS の系列の構成を拡張できた。ここではこれらの系列について解説する。

$k = 4$ の場合の $P_k(n)$ 内の MAS の分類では議論の場合分けがどんどん増えていき、分類なんかできないのではないかと不安な気持ちだった。$k = 5$ の場合にも MAS の分類を試みたが、$k \leq 4$ の場合とは比較にならないほど議論の場合分けが増えていき、$k \leq 4$ の場合と同じ手法でやっていたのでは分類に到達しないように思われた。

これとは別に論文 [1] の原稿をまとめている頃に、同僚の石井敦さんが MAS を求めるプログラムを作成して、数の小さいところで MAS をリストにしてくれた。その結果を見ると、$P_5(10)$ の MAS は 2、$P_5(11)$ の MAS は 15、$P_5(12)$ の MAS は 64 となっていて、MAS の個数は急激に増えている。

これらの状況に鑑みてまず多くの MAS の系列を見つけることが重要だと感じ、MAS の系列発見を試みた。そのうちのいくつかは論文 [1] ですでに発表している。それ以降に発見した系列は [2] にまとめた。

自然数 $1 \leq k \leq l$ に対して

$$A(2k, 2l) = \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \in P_{2k}(2l) \mid \alpha_i \in \{\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \{2l-1, 2l\}\}\}$$

によって、$P_{2k}(2l)$ の部分集合 $A(2k, 2l)$ を定める。

補題 1 $A(2k, 2l)$ は $P_{2k}(2l)$ の対蹠的部分集合である。

定理 2 $3k - 1 \leq l$ ならば、$A(2k, 2l)$ は $P_{2k}(2l)$ と $P_{2k}(2l+1)$ の MAS である。

$$Ev_{2l} = \{\{i_1, \ldots, i_l\} \mid i_j \in \{2j-1, 2j\}\ (1 \leq j \leq l),\ \text{偶数の個数は偶数}\}$$

によって $P_l(2l)$ の部分集合 Ev_{2l} を定める。

補題 3 Ev_{2l} は $P_l(2l)$ の対蹠的部分集合である。

定理 4 $2l \equiv 2, 4, 6 (\mathrm{mod} 8)$ のとき、Ev_{2l} は $P_l(2l)$ の MAS である。Ev_{8m} は $P_{4m}(8m)$ の MAS ではない。$A(4m, 8m) \cup Ev_{8m}$ は $P_{4m}(8m)$ の MAS である。

湯沢 2013 の講演後、以下の結果を得た。

$$A(2k+1, 2l+1) = \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k, 2l)\}$$

によって部分集合 $A(2k+1, 2l+1) \subset P_{2k+1}(2l+1)$ を定める。

補題 5 $A(2k+1, 2l+1)$ は $P_{2k+1}(2l+1)$ の対蹠的部分集合である。

定理 6 $3k-1 \leq l$ かつ $2 \leq k$ ならば、$A(2k+1, 2l+1)$ は $P_{2k+1}(2l+1)$ と $P_{2k+1}(2l+2)$ の MAS である。

上記の系列を利用して n が十分大きいときに、$P_5(n)$ の対蹠的部分集合 A に対して

$$\#A \leq \binom{[(n-1)/2]}{2}$$

が成り立ち、さらに等号が成り立つならば A は $A\left(5, 2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)$ と合同であることがわかった。この評価を得るために、有向実 Grassmann 多様体の極地に対応する $P_k(n)$ 内の部分集合を利用した。$k \leq 4$ の場合の MAS の分類も利用したので、このままでは $k \geq 6$ の場合にこの手法を適用するのは難しいが、他の手法も組合せることで同様の評価と等号成立条件を求められることを期待している。

参考文献

[1] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, Internat. J. Math. 24 no.8 (2013), 1350061-1–28.

[2] H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal subsets, preprint.