

カスプ辺の微分幾何学的振る舞い

山田光太郎*

本講演は Luciana F. Martins, 佐治健太郎, 梅原雅顕 各氏との共同研究 [7] にもとづく。

可微分写像

$$f_{ce}: \mathbf{R}^2 \ni (u, v) \longmapsto (u, v^2, v^3) \in \mathbf{R}^3$$

を標準的なカスプ辺とよぶ(図1)。標準的なカスプ辺は、点 $(u, 0)$ ($u \in \mathbf{R}$) に特異点、すなわち微分写像 df_{ce} が単射にならない点をもつ。一般に、 \mathbf{R}^2 の領域 U から \mathbf{R}^3 への C^∞ 写像 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ の特異点 p がカスプ辺であるとは、 p において f が f_{ce} と右左同値 (A -同値) となること、すなわち、点 p の近傍 V から \mathbf{R}^2 の原点の近傍 V' への微分同相写像 φ ($\varphi(p) = 0$) と \mathbf{R}^3 における $f(p)$ の近傍 W から原点の近傍 W' への微分同相写像 Φ で $\Phi(f(p)) = 0$ となるものが存在して、 V 上で

$$f = \Phi^{-1} \circ f_{ce} \circ \varphi$$

が成り立つことである。

写像 f の特異点 p がカスプ辺ならば、 p の近傍で f の特異点集合は \mathbf{R}^2 の正則曲線となり、その f による像はなめらかな空間曲線を与える。

図1の右側3つはともにカスプ辺を与えているが、微分幾何学的な目で眺めるとその“曲がり方”が異なっているように見える。本稿では、この曲がり方を表す不変量を紹介し、特異点の近くでのガウス曲率の振る舞いとカスプ辺の不変量との関係を述べたい。

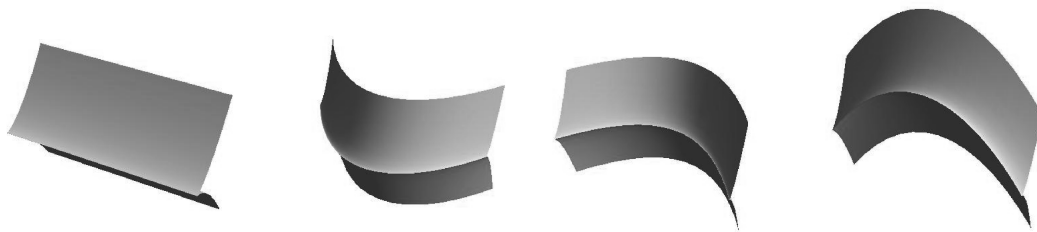


図1 カスプ辺

1 準備：カスプ辺

領域 $U \subset \mathbf{R}^2$ の写像 $f: \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ が点 $p \in U$ にカスプ辺をもつとする。

*東京工業大学大学院理工学研究科; kotaro@math.titech.ac.jp
部分多様体湯沢 2013 年 11 月 21 日・湯沢グランドホテル

このとき p の近傍 V で f は波面 (wave front) を与える．すなわち，なめらかな写像 $\nu: V \rightarrow S^2 =$ 単位球面で次を満たすものが存在する：

- $\langle df, \nu \rangle = 0$ ，すなわち $\nu(q)$ は $df(T_q \mathbf{R}^2)$ 直交する単位ベクトル場である．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbf{R}^3 の標準的な内積を表す．
- $(f, \nu): V \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ ははめ込みを与える．

この ν を f の単位法線ベクトル場，ガウス写像とよぶ．

一般に波面 f のガウス写像を ν とするとき

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu) \quad \left((u, v) \text{ は定義域の局所座標で } f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, f_v = \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

とおくと， f の特異点集合は $\{q \mid \lambda(q) = 0\}$ と表される．とくに，カスプ辺は非退化な特異点，すなわち，カスプ辺 p において $(d\lambda)_p \neq 0$ が成り立つ．したがって，陰関数定理より，特異点集合はカスプ辺の近傍で \mathbf{R}^2 のなめらかな曲線を与えている．これを特異曲線とよぶ．以下，特異曲線を $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = p$) とパラメータ表示しておく．

波面の非退化特異点 p において $(df)_p$ の階数は 1 である．とくに，特異曲線 $\gamma(t)$ に沿った \mathbf{R}^2 なめらかなベクトル場 $\eta(t)$ で， $\text{Ker}(df_{\gamma(t)}) = \mathbf{R}\eta(t)$ となるものをとることができる．これを退化ベクトル場とよぶ．

これらを用いてカスプ辺をつぎのように特徴づけることができる

定理 1 ([4, Proposition 1.3, Lemma 2.2]). 波面 $f: \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ の非退化な特異点 p がカスプ辺であるための必要十分条件は， p を通る特異曲線の p におけるベクトルと退化方向が線形独立となることである．

とくに，

- カスプ辺 p の近傍で，特異曲線の各点はカスプ辺からなる．
- 特異曲線 $\gamma(t)$ の像 $f \circ \gamma(t)$ は \mathbf{R}^3 の正則曲線を与える．

2 カスプ辺の標準形と不変量

2.1 Martins-佐治によるカスプ辺の標準形

C^∞ 写像 $f: \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ のジェネリックな特異点である交叉帽子 (cross cap, Whitney の傘) は $f_{cc} = (u, uv, v^2)$ で与えられる写像と右左同値なものである．West [15] は交叉帽子の標準的な表示を与えた．すなわち，写像 $f: \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ が点 p に交叉帽子をもつなら， p を中心とする \mathbf{R}^2 の局所座標 (u, v) と \mathbf{R}^3 の合同変換 Φ ，および b_j ($j \geq 3$), a_{jk} ($j+k \geq 2$) で，任意の整数 $N \geq 3$ に対して

$$\Phi \circ f(u, v) = \left(u, uv + \sum_{j=3}^N \frac{b_j}{j!} v^j + o(v^N), \sum_{2 \leq j+k \leq N} \frac{a_{jk}}{j!k!} u^j v^k + o\left(\sqrt{u^2 + v^2}^N\right) \right) \quad (a_{02} > 0)$$

を満たすものがただひとつ通りに存在する (福井-長谷川 [1] 参照)．ただし $o(*)$ は高次の項を表す．とくに一意性から，係数 b_j, a_{jk} は交叉帽子の不変量を与えている．福井-長谷川 [1] や，長谷川-本田-直川-梅原-山田 [3] においてこれらの不変量の幾何学的な性質が調べられている．

一方，Martins-Saji は交叉帽子の標準形に倣ってカスプ辺の標準型を与えた [6]:

定理 2 (カスプ辺の標準形 [6]). 写像 $f: \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ が $p \in U$ にカスプ辺をもつとする. このとき, 点 p が $(0, 0)$ に対応する U の座標 (u, v) と \mathbf{R}^3 の合同変換 Φ で

$$\Phi \circ f(u, v) = \left(u, \frac{a_{20}}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{a_{30}}{6}u^3, \frac{b_{20}}{2}u^2 + \frac{b_{30}}{6}u^3 + \frac{b_{12}}{2}uv^2 + \frac{b_{03}}{6}v^3 \right) + h(u, v)$$

$$\left(h(u, v) = (0, u^4h_1(u), u^4h_2(u) + u^2v^2h_3(u) + uv^3h_4(u) + v^4h_5(u, v)), \quad b_{20} \geq 0 \right)$$

となるものがある意味でただひと通り存在する. ここで $b_{03} \neq 0$, $h_j(u)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $h_5(u, v)$ は C^∞ 関数である. (単位法線ベクトルがなめらかに定義されることから, この標準形に $v \cdot (u$ の関数) の形の項が現れないことがわかる.)

Martins-Saji [6] ではこの標準形のいくつかの係数の微分幾何学的意味, とくに, 佐治-梅原-山田 [9] で定義された特異曲率 (singular curvature), 極限法曲率 (limiting normal curvature) との関係を与えている.

Martins-佐治-梅原-山田 [7] では, このような不変量の微分幾何学的性質, とくに内的・外的という性質と, 曲面のガウス曲率などとの関係を考察した. ここでは, 不変量が外的であるとは, その量を保たない第一基本形式を保つ変形が存在することをいい, そうでないとき内的であるという.

以下, カスプ辺の 3 つの不変量 (特異曲率, 極限法曲率, カスプ状曲率) とその幾何学的な意味を紹介する.

この節を通じて, $U \subset \mathbf{R}^2$ を原点 $p = 0$ を含む領域とし, 写像 $f: \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ は原点 $p = 0$ にカスプ辺をもつとしておく. このとき, f のガウス写像を ν と書き, 特異曲線を $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = 0 = p$), その像を $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ としておく. $\hat{\gamma}(t)$ は \mathbf{R}^3 の正則曲線である.

2.2 特異曲率

カスプ辺 $\gamma(t)$ における特異曲率は

$$(2.1) \quad \kappa_s(t) := \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \frac{\det(\dot{\hat{\gamma}}(t), \ddot{\hat{\gamma}}(t), \nu(\gamma(t)))}{|\dot{\hat{\gamma}}(t)|^3}$$

で定義される [9, 式 (1.7)]. ただし $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$, η は $\{\dot{\gamma}, \eta\}$ が \mathbf{R}^2 の正の基底を与えるように選ぶ. すると, κ_s は, γ のパラメータのとり方, 特異曲線の向き, \mathbf{R}^2 の向き付け, ガウス写像 ν の選び方によらないことがわかる. とくに点 $p = 0$ における特異曲率は, 定理 2 の a_{20} と一致する ([6, 7]). 図 3 に特異曲率が正・負のカスプ辺を挙げる.

特異曲線の像 $\hat{\gamma}$ を弧長パラメータで表示しておけば, この量は $\ddot{\hat{\gamma}}$ の, ν の直交補空間への射影の大きさに符号をつけたものとなる. したがって, はめこまれた曲面上の曲線の測地的曲率に対応するものと考えられる. とくに, はめこまれた曲面の場合と同様に, 特異曲率 κ_s は内的な不変量であることがわかる [9, Propotion 1.8]. とくに, 特異曲率とガウス曲率を用いてガウス・ボンネ型の定理を述べることができる [9, Section 2], [10], [12].

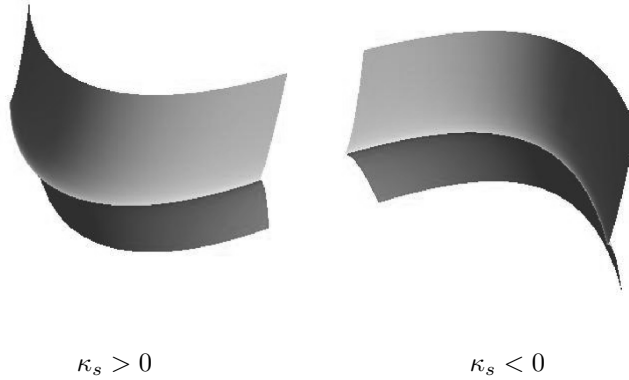


図 2 特異曲率が正・負のカस्प辺

2.3 極限法曲率

特異曲線の像 $\hat{\gamma}$ の加速度の法ベクトル ν 方向の成分 κ_ν は、はめこまれた曲面上の曲線の法曲率に対応する。これを極限法曲率という [9, 式 (3.11)] :

$$(2.2) \quad \kappa_\nu(t) := \frac{\langle \ddot{\hat{\gamma}}(t), \nu(\gamma(t)) \rangle}{|\dot{\hat{\gamma}}(t)|^2}.$$

特異曲線の像 $\hat{\gamma}(t)$ の空間曲線としての曲率を $\kappa(t)$ とすると、定義から

$$\kappa(t) = \sqrt{\kappa_s(t)^2 + \kappa_\nu(t)^2}$$

であることがわかる。とくに点 $p = 0$ における極限法曲率の値は定理 2 の b_{20} に一致する [6, 7]。Martins-Nuño-Ballesteros は別の方法で臍的曲率 (umbilic curvature) κ_u とよばれる不変量を与えたが、これは極限法曲率の絶対値と一致する [7]。

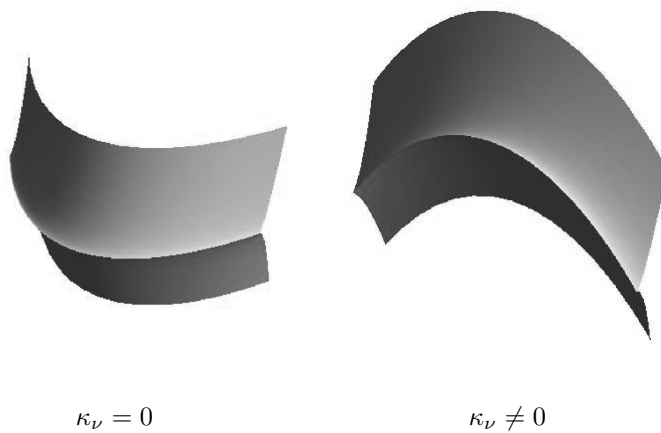


図 3 極限法曲率が 0 のカस्प辺と 0 でないカस्प辺

はめこまれた曲面と同様，極限法曲率は外的な不変量であることが期待される．実際，最近，極限法曲率を変えるカスプ辺の等長変形を，直川氏，梅原氏と筆者とで構成した [8]．

極限法曲率はガウス写像の性質と関わりが深い．波面 f のガウス写像 ν の特異点は， f の正則点上では $K = 0$ となる点である．一般に f の特異点と ν の特異点集合は一致しないが，これらが一致するための必要十分条件が， $\log |K|$ (K はガウス曲率) が有界となることである [12, Lemma 3.25]．これに関連して，次が得られる：

定理 3 ([7, Theorem A]). 波面 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ の特異点 p がカスプ辺であるとき， p がガウス写像 ν の特異点であるための必要十分条件は κ_ν が p で 0 となることである．^{*1}

極限法曲率 κ_ν が零でないカスプ辺の両側でガウス曲率は符号を変え，片側では $-\infty$ ，反対側では $+\infty$ に発散する．逆にガウス曲率がカスプ辺 p の近傍で有界であるための必要十分条件は，特異曲線上の p の近傍で κ_ν が恒等的に 0 となることである ([9]，次節参照)．このように極限法曲率は特異点の近傍でのガウス曲率の挙動と関係している．

ガウス曲率という内的な不変量の挙動が外的な不変量 κ_ν で表されるというのは奇異に思われるが，実は次の節で与えるカスプ的曲率 κ_c と極限法曲率の積 $\kappa_c \kappa_\nu$ の絶対値は内的である，という“ガウスの驚異の定理”に類似の性質が成り立っている (2.5 節参照)．

2.4 カスプ的曲率

カスプ辺のもうひとつの不変量としてカスプ的曲率 cuspidal curvature を紹介する．カスプ辺 p を通る特異曲線 $\gamma(t)$ 上の退化ベクトル場 $\eta(t)$ を \mathbf{R}^2 における p の近傍で定義されたなめらかなベクトル場 $\eta(u, v)$ に拡張することができる．これを拡張された退化ベクトル場とよび，同じ記号 η で表す．すると， η 方向の方向微分 f_η は p の近傍で定義された \mathbf{R}^3 値関数であるから，さらに η 方向に微分して $f_{\eta\eta}$ ， $f_{\eta\eta\eta}$ を考えることができる．この記号を用いて

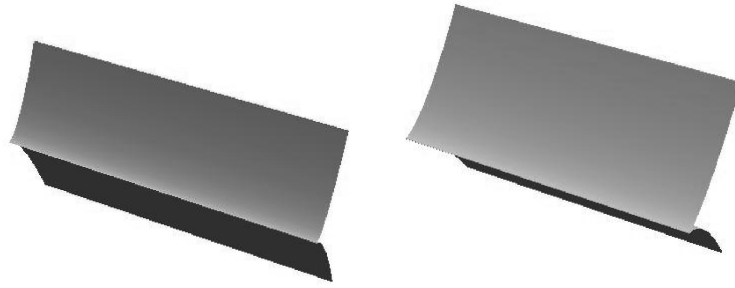
$$(2.3) \quad \kappa_c(t) := \frac{|\dot{\gamma}(t)|^{3/2} \det\left(\dot{\gamma}(t), f_{\eta\eta}(\gamma(t)), f_{\eta\eta\eta}(\gamma(t))\right)}{\left|\dot{\gamma}(t) \times f_{\eta\eta}(\gamma(t))\right|^{5/2}}$$

で与えられる $\kappa_c(t)$ を点 $\gamma(t)$ におけるカスプ的曲率という ([7, 式 (2.4)])．とくに点 $p = \gamma(0)$ におけるカスプ的曲率は，定理 2 の標準形の係数 b_{03} に一致する．とくにカスプ辺において κ_c は零にならない．カスプ的曲率は，カスプ辺の“開き具合”を表す．このことを説明するために，梅原氏によって導入された，平面曲線にあらわれる 3/2-カスプのカスプ的曲率 ([14]；[11, 13] 参照) を用いる： \mathbf{R}^2 の曲線 $\sigma(t)$ が $t = 0$ に 3/2-カスプをもつとする．このとき

$$\tau := \frac{\det(\ddot{\sigma}(0), \ddot{\sigma}(0))}{|\ddot{\sigma}(0)|^{5/2}} (\neq 0)$$

を 3/2-カスプのカスプ的曲率という．この量は 3/2-カスプの“開き具合”を与える．実際，3/2-カスプのカスプ的曲率 τ は，それをもっとも良く近似するサイクロイドの半径 a を用いて $|\tau| = 1/\sqrt{a}$ と表される．

^{*1} 極限法曲率の定義は，余階数 1 の特異点にたいして一般化することができ定理 3 の結論が成り立つ [7]．ここで，特異点 p が余階数 1 であるとは， $\text{Ker}(df)_p$ の次元が 1 となることである．



κ_c : 小

κ_c : 大

図4 カスプ的曲率とカスプ辺の開き具合

この量を用いると、 κ_c の幾何学的な意味を次のように述べる事ができる：カスプ辺 p において、特異曲線の像 $\hat{\gamma}$ の速度ベクトルに直交する平面 π と f の像の共通部分は平面曲線を与え、 p はその $3/2$ -カスプであり、その平面曲線としてのカスプ的曲率が κ_c である [7, Proposition 2.1] .

カスプ的曲率 κ_c も外的な不変量である . 実際、線織面のカスプ辺の等長変形で κ_c を変えるものを具体的に構成することができる ([7, 3]) . はめ込まれた線織面の等長変形が具体的に表示できることはよく知られており、ここの変形はそのカスプ辺版である . 線織面のガウス曲率は非正であるから、2.3 節の最後に述べたように ([9] の結果から) κ_ν は恒等的に 0 にならなければならない . したがって、このような変形では κ_ν が外的であることを示すことはできない . 2.3 節で言及した κ_ν を動かす等長変形 [8] は線織面にかぎらない一般的なカスプ辺の等長変形から得られる .

2.5 カスプ辺の積曲率とガウス曲率

いま、天下り式に、カスプ辺におけるカスプ的曲率 κ_c と極限法曲率 κ_ν の積を

$$\kappa_\Pi := \kappa_c \kappa_\nu$$

と定め、積曲率 product curvature とよぶことにする [7] .

カスプ辺の近傍でのガウス曲率の挙動を調べるために、特別な座標をとる：

事実 4 ([9, 7]). 写像 $f: \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ の特異点 p がカスプ辺ならば、 p を原点とする座標系 (u, v) で、特異点集合は u 軸、さらに u 軸上で

- $|f_u| = 1,$
- $f_v = 0,$
- $\{f_u, f_{vv}, \nu\}$ が正の向き of 正規直交系をなす

ようなものが存在する . これを適合的座標系とよぶ . 適合的座標系は、カスプ辺の第一基本形式を変えない変形で符号を除いて保たれる .

このような座標系の下で、 f のガウス曲率 $K(u, v)$ は次のように表される：

$$(2.4) \quad K(u, v) = \frac{1}{v} (\kappa_c(u) \kappa_\nu(u) + v \psi(u, v)) = \frac{1}{v} (\kappa_\Pi(u) + v \psi(u, v)).$$

ただし $\psi(u, v)$ は C^∞ 関数である．とくに κ_{II} はガウス曲率から定まるので次を得る：

定理 5 ([7, Theorem 2.8]). 積曲率の絶対値 $|\kappa_{\text{II}}|$ は内的不変量である．

すなわち，外的不変量である κ_c, κ_ν の積が内的になる，という“ガウスの驚異の定理”に類似の事実が成り立つ．

また，式 (2.4) から

- $\kappa_{\text{II}} \neq 0$ のとき，特異曲線 $v = 0$ をはさんで上半平面，下半平面でガウス曲率は符号を変え，絶対値は $v \rightarrow 0$ で無限大に発散する [9]．
- ガウス曲率が特異曲線をはさんで有界であるための必要十分条件は κ_{II} が恒等的に 0 となることである．

これは，ガウス曲率の挙動を極限法曲率 κ_ν で表した [9, Lemma 3.25] の言い換えである．実際，2.4 節でのべたように $\kappa_c \neq 0$ であるから， $\kappa_{\text{II}} = 0$ と $\kappa_\nu = 0$ は同値である．

さらに，カusp边上の 1 点で $\kappa_{\text{II}} = 0$ (すなわち $\kappa_\nu = 0$) となる場合は次のように特徴づけられる．

定理 6 ([7]). 波面 $f: \mathbf{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbf{R}^3$ のカusp辺 p において次は同値である：

- (1) 点 p における極限法曲率 κ_ν が 0 となる．
- (2) 曲面のガウス曲率は p に近づくとき，有限個の方向からの近づき方を除いたすべての近づき方に関して有界である*2．
- (3) 点 p はガウス写像の特異点である．

補遺

- 本稿では \mathbf{R}^3 の波面を扱ったが，カusp辺の不変量 $\kappa_s, \kappa_\nu, \kappa_c$ は一般の 3 次元リーマン多様体の波面に対して定義することができる．
- 2.3 節の脚注で述べたように， κ_ν はカusp辺以外の余階数 1 特異点に対しても定義できる ([7, 式 (1.1)]) ．

参考文献

- [1] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella—a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul., **4** (2012), 35–67.
- [2] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z., **259** (2008), 827–848.
- [3] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara, and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, Selecta Mathematica, online first. DOI: 10.1007/s00029-013-0134-6.

*2 点 p を中心とする U の極座標 (r, θ) をとるとき，有限個の偏角 θ の値を除いて， $r \rightarrow 0$ で K が有界となること．正確には [7, Definition 2.3] の意味で有理的有界 (rationally bounded) ．

- [4] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., **221** (2005), 303–351.
- [5] L. F. Martins and J. J. Nuño-Ballesteros, *Contact properties of surfaces in \mathbf{R}^3 with corank 1 singularities*, preprint, 2012.
Available from www.uv.es/nuno/Preprints/Nuno_Martins.pdf.
- [6] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, preprint, 2013.
Available from www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/Singularidades/martins-saji-geometric.pdf
- [7] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature around non-degenerate singular points on wave fronts*, preprint, 2013. arXiv:1308.2136.
- [8] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, in preparation.
- [9] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math., **169** (2009), 491–529.
- [10] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, Kyushu J.Math., **62** (2008), 259–280.
- [11] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka J. Math. **47** (2010), 591–607.
- [12] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, Journal of Geometric Analysis (2012) 22:383-409. DOI 10.1007/s12220-010-9193-5.
- [13] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Diff. Geom. Appl., **30** (2012), 285–299.
- [14] 梅原雅顕, 特異点をもつ曲面の微分幾何学, 数学のたのしみ「特異点の世界：その広さと豊かさ」(上野健爾, 砂田利一, 新井仁之編集), 日本評論社 (2005), pp. 50–64.
- [15] J. West, *The differential geometry of the cross-cap*, Ph. D. thesis, Liverpool Univ. 1995.