New examples of compact special Lagrangian submanifolds embedded in hyper-Kähler manifolds

服部　広大

慶應義塾大学

1　特殊ラグランジュ部分多様体

複素 m 次元ケーラー多様体 (X, I, ω) の標準束 $K_X = \Lambda^{m,0}T^*X$ が正則な自明化 $\Omega \in H^0(X, K_X)$ をもち，さらにケーラー形式との間で

$$\omega^m = (-1)^{m(m-1)/2} m! \Big(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Big)^m \Omega \wedge \overline{\Omega}$$

という関係が満たされるときに (X, I, ω, Ω) をカラビ・ヤウ多様体と呼ぶ．また，X の実 m 次元部分多様体 L が

$$\omega|_L = \mathrm{Im}\Omega|_L = 0$$

を満たすとき，これを特殊ラグランジュ部分多様体と呼ぶ．コンパクトな特殊ラグランジュ部分多様体は，それ自身の定めるホモロジー類の中で体積最小な部分多様体であることが [1] において示されている．

一般のカラビ・ヤウ多様体において特殊ラグランジュ部分多様体を構成することは，いくつか構成法が知られているとはいえ，容易ではない．しかし，超ケーラー多様体と呼ばれる，カラビ・ヤウ多様体の特別なクラスに対しては，複素幾何的な方法で構成できることが知られている．超ケーラー多様体とは，実 $4n$ 次元リーマン多様体 (X, g) であって，$I_1 I_2 I_3 = -1$ を満たす 3 つの複素構造 I_1, I_2, I_3 をもち，さらに各 $(X, I_\alpha, \omega_\alpha)$ がケーラー多様体となるようなものである．ただし，$\omega_\alpha = g(I_\alpha \cdot, \cdot)$ とする．このとき，$(X, I_1, \omega_1, (\omega_2 + \sqrt{-1}\omega_3)^n)$ はカラビ・ヤウ多様体である．

超ケーラー多様体の実 $2n$ 次元部分多様体 L は

$$\omega_2|_L = \omega_3|_L = 0$$

を満たすとき正則ラグランジュ部分多様体と呼ばれる．特に，このとき L は (X, I_1) の複素部分多様体となる．

正則ラグランジュ部分多様体の定義は，3 つのケーラー形式のうちの 2 つが L 上で消えているということが本質的である．故に，例えば定数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\omega_1|_L = (-\sin\theta\omega_2 + \cos\theta\omega_3)|_L = 0$$

を満たすような実 $2n$ 次元部分多様体 L を θ-正則ラグランジュ部分多様体と呼ぶとすると，これは複素多様体 $(X, \cos\theta I_2 + \sin\theta I_3)$ の複素部分多様体である．このとき，以下の良く知られた命題が成立する．

命題 1.1. 任意の $k = 1, 2, \cdots, 2n$ に対し，$k\pi/n$-正則ラグランジュ部分多様体は，$(X, I_1, \omega_1, (\omega_2 + \sqrt{-1}\omega_3)^n)$ の特殊ラグランジュ部分多様体である．

Proof. $\Omega = (\omega_2 + \sqrt{-1}\omega_3)^n$ とおいたとき，$\mathrm{Im}\Omega|_L = 0$ が成り立つことを示せばよい．今，

$$\Omega|_L = (\omega_2 + \sqrt{-1}\omega_3)^n|_L = (\omega_2|_L + \sqrt{-1}\omega_3|_L)^n$$

であり，さらに

$$\omega_2 + \sqrt{-1}\omega_3 = e^{\sqrt{-1}\theta}(\cos\theta\omega_2 + \sin\theta\omega_3 + \sqrt{-1}(-\sin\theta\omega_2 + \cos\theta\omega_3))$$

より，$\theta = k\pi/n$ とすると

$$\begin{aligned}\Omega|_L &= e^{\sqrt{-1}k\pi}(\cos\theta\omega_2|_L + \sin\theta\omega_3|_L + \sqrt{-1}(-\sin\theta\omega_2 + \cos\theta\omega_3)|_L)^n \\ &= (-1)^k(\cos\theta\omega_2|_L + \sin\theta\omega_3|_L)^n\end{aligned}$$

となるため，$\mathrm{Im}\Omega|_L = 0$ が従う． □

命題 1.1 の逆が成立するかどうかは重要な問題である．もし成立してしまうならば，超ケーラー多様体の中で特殊ラグランジュ部分多様体を構成することは，代数幾何学的な問題に帰着されてしまうことになる．超

ケーラー多様体における特殊ラグランジュ部分多様体論は，代数的な世界に収まると言っても良い．

本講演の主結果は，命題 1.1 の逆命題に対する反例の構成である．すなわち，超ケーラー多様体に埋め込まれた特殊ラグランジュ部分多様体であり，かつどのような θ に対しても θ-正則ラグランジュ部分多様体とは成り得ないものを構成した．従って，特殊ラグランジュ部分多様体は超ケーラー多様体においても超越的な対象たりうるのである．次章でその結果について詳しく述べる．

2 主結果

本講演の主結果は次の通りである．

定理 2.1. 以下を満たすような実 $4n \geq 8$ 次元トーリック超ケーラー多様体 (X, g, I_1, I_2, I_3) と，その部分多様体 $L_1, L_2, \cdots, L_{2n}$，そしてコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体の族 $\{L_t\}_{0<t<\delta}$ が存在する．

(i) 各 L_k はコンパクト $k\pi/n$-正則ラグランジュ部分多様体である．

(ii) L_k と L_{k+1} は一点で横断的に交わり，L_{2n} と L_1 も一点で横断的に交わる．異なる L_k と L_l が共通部分をもつような状況は，これらの場合に限る．

(iii) L_t は $t \to 0$ において $\bigcup_{k=1}^{2n} L_k$ に，カレントの意味で収束する．

(iv) L_t は，いかなる θ に対しても θ-正則ラグランジュ部分多様体とはならない．

以下，証明の概略を述べる．まず，求める特殊ラグランジュ部分多様体の入れ物となるトーリック超ケーラー多様体として，多重 Eguchi-Hanson 空間の直積を採用する．多重 Eguchi-Hanson 空間とは，実 4 次元のトーリック超ケーラー多様体である．多重 Eguchi-Hanson 空間の中では，θ-正則ラグランジュ部分多様体を複素運動量写像の逆像として容易に構成できる．そのような θ-正則ラグランジュ部分多様体たちを直積して $L_1, L_2, \cdots, L_{2n}$ をつくる．ただし，このときに (ii) の条件を満たすように取ってくるのは非自明であるが，多重 Eguchi-Hanson 空間を上手く選んでくると，それが実現できる．

次に，$\bigcup_{k=1}^{2n} L_k$ を，孤立特異点付きのコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体とみなす．特異点は全て錐型の特異点であり，その近傍を取り除いて Lawlor's neck と呼ばれる局所モデルを代わりに貼り合わせて滑らかなコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体を得る．ただし，このときに Joyce による特殊ラグランジュ部分多様体の貼り合わせの結果 [2][3] を用いる．この結果を用いることによって，$(i)-(iii)$ を満たす L_t が構成される．(iv) は，以下のような議論によって証明される．

一般に，$L_1, L_2, \cdots, L_A$ を超ケーラー多様体 M に埋め込まれた部分多様体とし，L_α は θ_α-正則ラグランジュ部分多様体とせよ．ただし $\theta_\alpha \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ とする．また，L_α の向きは $\omega^{\sigma(\theta_\alpha)}$ によって定まっているものとする．このとき，$\frac{n}{\pi}\theta_\alpha$ が偶数ならば $\varepsilon_\alpha = 1$ とし，奇数ならば $\varepsilon_\alpha = -1$ と定めることにする．このとき，次の命題を得る．

命題 2.2. 以上の状況の下，ある $\theta \in \mathbb{R}$ についてコンパクト θ-正則ラグランジュ部分多様体となるような L がホモロジー類 $\sum_{\alpha=1}^{A} \varepsilon_\alpha [L_\alpha]$ に含まれるならば，$\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_A\}$ は $\theta + \pi\mathbb{Z}$ に含まれなければならない．

命題 2.2 を使って (iv) を示す．まず，L_t はその構成の仕方によりホモロジー類 $\sum_{\alpha=1}^{2n} \varepsilon_\alpha [L_\alpha]$ に含まれることがわかる．従って，もしも L_t が θ-正則ラグランジュ部分多様体となるならば，命題 2.2 より

$$\left\{\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}, 0\right\} \subset \theta + \pi\mathbb{Z}$$

となるが，このようなことが起こりうるのは $n = 1$ の場合だけである．

3　モジュライ空間との関係

コンパクトな特殊ラグランジュ部分多様体 L の変形のモジュライ空間は $b_1(L)$ 次元の滑らかな多様体の構造をもつことが [4] において示されている．定理 2.1 において構成した特殊ラグランジュ部分多様体 L_t については，$b_1(L_t) = 1$ であることが示されるので，この場合のモジュライ空間は 1 次元であり，定理 2.1 において構成されている族のパラメーターの数と一致している．つまり，モジュライ空間は曲線の形をしており，一方の境界に向けて極限を取ると $\bigcup_{k=1}^{2n} L_k$ が現れる．もう一方の方向に極限を取ることも考えられるが，そのときにどのような対象が極限として現れるか，全く分かっていない．

参考文献

[1] Reese Harvey and H Blaine Lawson. Calibrated geometries. *Acta Mathematica*, 148(1):47–157, 1982.

[2] Dominic Joyce. Special lagrangian submanifolds with isolated conical singularities. iii. desingularization, the unobstructed case. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 26(1):1–58, 2004.

[3] Dominic Joyce et al. Special lagrangian submanifolds with isolated conical singularities. v. survey and applications. *Journal of Differential Geometry*, 63(2):279–347, 2003.

[4] Robert C. McLean. Deformations of calibrated submanifolds. In *Commun. Analy. Geom.* Citeseer, 1996.