

ミンコフスキー空間内の CMC 曲面における 特異点の双対性*

本田 淳 史

概要

ミンコフスキー空間の極大曲面において、折り目特異点は型変化や特異点の双対性などで重要な役割を果たす。本稿では、極大曲面に現れる特異点で知られている性質を平均曲率が一定で0ではない空間的曲面、つまり空間的 CMC 曲面で考察した結果を紹介する。まず、空間的 CMC 曲面は折り目特異点を持たないことを示す。また、錐状特異点を持つ極大曲面の共役曲面は折り目特異点を持つ、という極大曲面の結果を空間的 CMC 曲面の場合に考察した結果も合わせて報告する。さらに、generic な特異点に対しては特異点の双対性が成立することを紹介する。

1 イントロダクション

3次元ミンコフスキー空間を $L^3 = (\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle = dx^2 + dy^2 - dz^2)$ で表す。以下、 Σ^2 は向き付けられた滑らかな2次元多様体を表すこととする。空間的はめ込み $X : \Sigma^2 \rightarrow L^3$ で、平均曲率が恒等的に消えているものを**極大曲面**という。完備な極大曲面は平面に限ることが知られている [2]。従って、極大曲面の大域的な性質を調べようとする、特異点を許容した枠組みで極大曲面を考える必要がある。ここで、 $p \in \Sigma^2$ が C^∞ -写像 $X : \Sigma^2 \rightarrow L^3$ の**特異点**であるとは、 X が p においてはめ込みでないときをいう。特異点でない点を**正則点**という。

定義 1.1 ([16]). リーマン面 Σ^2 に対し、以下を満たす C^∞ -写像 $X : \Sigma^2 \rightarrow L^3$ を**極大面**という。

- ある Σ^2 の開かつ稠密な部分集合 W が存在し、 $X|_W$ は共形極大はめ込みを与える。
- $dX(p) = 0$ となる点 $p \in \Sigma^2$ が存在しない。

極大面は特異点を持つことがあるが、そこで完備性を新たに定義することで大域的に非自明な例が豊富に存在し、興味深い性質を持つことがわかってきている [16, 6, 5]。極大面はユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の極小曲面と類似の Weierstrass 型表現公式をもつ。

事実 1.2 ([13, 16]). 極大面 $X : \Sigma^2 \rightarrow L^3$ に対し、 Σ^2 上のある有理型関数 g と正則1次微分 ω が

* 本稿の内容の一部は、小磯深幸氏 (九州大学) と佐治健太郎氏 (神戸大学) との共同研究に基づく。

存在し, X は平行移動を除いて

$$(1.1) \quad X = \operatorname{Re} \Psi \quad \left(\text{ただし, } \Psi := \int (1 + g^2, i(1 - g^2), -2g) \omega \right)$$

と表すことができる.

極大面に頻繁に現れる特異点はカスプ辺, ツバメの尾, カスプ状交差帽子であることが知られている ([6]). ここで, これらの特異点の型は次のように定義されるものである.

定義 1.3. C^∞ -写像 $X : \Sigma^2 \rightarrow L^3$ に対し, X の特異点 $p \in \Sigma^2$ が**カスプ辺**であるとは, L^3 の微分同相写像 Φ と Σ^2 の局所座標系 φ で

$$\Phi \circ X \circ \varphi^{-1} = X_{\text{ce}}, \quad \Phi(X(p)) = (0, 0, 0), \quad \varphi(p) = (0, 0),$$

となるものが存在するときをいう. ここで, X_{ce} を X_{sw} に置き換えたものを**ツバメの尾**, X_{ccr} に置き換えたものを**カスプ状交差帽子**という. ただし,

$$X_{\text{ce}}(u, v) = (u, v^2, v^3), \quad X_{\text{sw}}(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v), \quad X_{\text{ccr}}(u, v) = (u, v^2, uv^3)$$

とする.

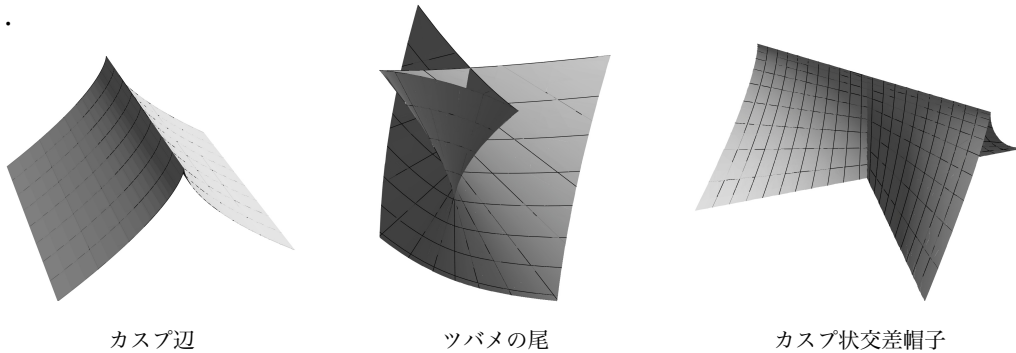


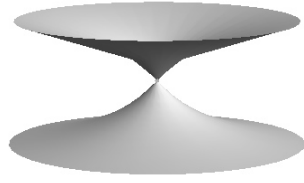
図1 極大面の generic な特異点

これらの特異点は特異点の双対性という観点からも興味深い. 極大面 $X : \Sigma^2 \rightarrow L^3$ を (1.1) のように表すとき, $X^\# := \operatorname{Im} \Psi$ を X の**共役極大面**という. 平面でない極大回転面, つまり極大カテノイド (図 2 左) の共役は極大ヘリコイド (図 2 右) になる. 極大カテノイドは錐状特異点を持ち, 極大ヘリコイドは折り目特異点を持つ. より一般に次のことが成り立つ.

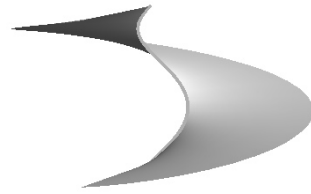
事実 1.4 ([16, 6, 11, 4]). 極大面 $X : \Sigma^2 \rightarrow L^3$ の共役を $X^\#$, $p \in \Sigma^2$ を X の特異点とする. このとき, p は $X^\#$ の特異点であり, さらに

- p が X のカスプ辺である必要十分条件は p が $X^\#$ のカスプ辺である.
- p が X のツバメの尾である必要十分条件は p が $X^\#$ のカスプ状交差帽子である.
- p が X の錐状特異点である必要十分条件は p が $X^\#$ の折り目特異点である.

さらに, 極大ヘリコイドは折り目特異点を越えて時間的極小ヘリコイドへと実解析的に延長される (図 3 参照). このような現象はより一般の状況で成り立ち, 折り目特異点を持つ極大面はその特異点集合を越えて時間的極小曲面へと実解析的に延長されることが知られている ([10, 4]).

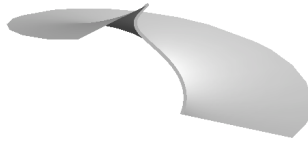


極大カテナイド

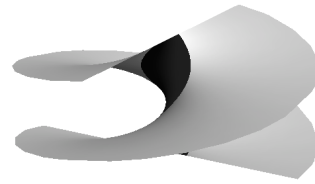


極大ヘリコイド

図2 錐状特異点を持つ極大面とその共役極大面



極大ヘリコイド



時間的極小曲面への実解析的延長

図3 極大ヘリコイドの時間的極小曲面への実解析的延長

このように極大曲面の折り目特異点は、平均曲率0曲面の型変化 [7, 8, 9, 12, 3, 4] や特異点の双対性において重要な役割を果たすが、空間的 CMC 曲面の折り目特異点の性質は知られていない。

2 主結果

本講演では、平均曲率が0でない空間的 CMC 曲面の折り目特異点を考察する。まず、特異点を許容する平均曲率が0でない空間的 CMC 曲面である**一般化された空間的 CMC 曲面**という概念を紹介する。

定義 2.1 ([15]). リーマン面 Σ^2 に対し、

- C^∞ -写像 $g : \Sigma^2 \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ が **regular extended harmonic map** であるとは、 $\hat{\omega} := \frac{\bar{g}_z}{(1 - |g|^2)^2}$ (z は Σ^2 の複素座標) とするとき、以下の二条件を満たすものである。
 - $\omega := \hat{\omega} dz$ が $\{p \in \Sigma^2; |g(p)| = 1\}$ を越えて C^1 -級の 1-form へと拡張できる。
 - $g_{z\bar{z}} + 2(1 - |g|^2)\bar{g}g_z\bar{\omega} = 0$ を満たす。
- Regular extended harmonic map $g : \Sigma^2 \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ と定数 $H \neq 0$ に対し、以下で定義される写像 $X : \Sigma^2 \rightarrow \mathbf{L}^3$

$$(2.1) \quad X = \frac{2}{H} \operatorname{Re} \int (1 + g^2, i(1 - g^2), -2g) \omega$$

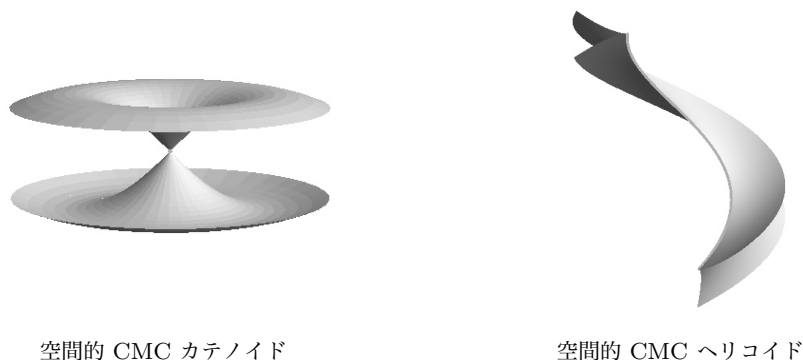
を**一般化された空間的 CMC 曲面**と呼ぶ。

一般化された空間的 CMC 曲面は，正則点集合では Akutagawa-Nishikawa による Kenmotsu 型表現公式 [1] そのものであり，平均曲率が 0 でない空間的 CMC はめ込みを与える。

このとき，以下が成り立つ。

定理 A. 一般化された空間的 CMC 曲面 は折り目特異点を許容しない。

極大面の場合，錐状特異点を持つものの共役面は折り目特異点を持つことが知られていた。それでは，一般化された空間的 CMC 曲面の場合には，錐状特異点を持つものの共役面はどのような特異点を持つのであろうか。空間的 CMC 曲面の共役面を極大面の場合のように明示的に記述することは一般に難しい。ここでは，錐状特異点を持つ一般化された CMC 曲面で回転面であるものに対して，その共役に現れる特異点を調べた結果を紹介する。



空間的 CMC カテナイド

空間的 CMC ヘリコイド

図 4 錐状特異点を持つ一般化された CMC 曲面とその共役面

ここで， L^3 の回転面とは， L^3 の等長変換群の 1 径数部分群である直線の各点を固定するようなものの作用で不変な曲面のことを指す。そのような 1 径数部分群は，楕円的，放物的，双曲的なものへと分類される。一般化された空間的 CMC 回転面を**一般化された空間的 Delaunay 曲面**と呼ぶことにする。Sasahara [14] によって一部の空間的 Delaunay 曲面の共役面は分類されている。

このとき，次が成り立つ。

定理 B. 錐状特異点を持つ一般化された空間的 Delaunay 曲面の共役は 5/2-カスプ辺を持つ。

ここで，5/2-カスプ辺とは，定義 1.3 において X_{ce} を $X_{5/2}(u, v) = (u^2, u^5, v)$ に置き換えたものである。さらに，5/2-カスプ辺は極大面には現れないこともわかり，極大面と一般化された空間的 CMC 曲面とは全く異なる特異点の性質を持つことがわかる。

一方で，カスプ辺，ツバメの尾やカスプ状交差帽子においては，一般化された空間的 CMC 曲面においても事実 1.4 と同様の特異点の双対性が成り立つ。

参考文献

- [1] K. AKUTAGAWA AND S. NISHIKAWA, The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-space, *Tohoku Math. J.* **42** (1990), 67–82.

- [2] E. CALABI, Examples of the Bernstein problem for some nonlinear equations, *Proc. Symp. Pure Math.* **15** (1970), 223–230.
- [3] S. FUJIMORI, Y.W. KIM, S.-E. KOH, W. ROSSMAN, H. SHIN, M. UMEHARA, K. YAMADA AND S.-D. YANG, Zero mean curvature surfaces in Lorenz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line, to appear in *Osaka Journal of Mathematics*.
- [4] S. FUJIMORI, Y.W. KIM, S.-E. KOH, W. ROSSMAN, H. SHIN, M. UMEHARA, K. YAMADA AND S.-D. YANG, Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics, *Math. J. Okayama Univ.* **57** (2015), 173–200.
- [5] S. FUJIMORI, W. ROSSMAN, M. UMEHARA, K. YAMADA AND S.-D. YANG, New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space, *Results in Math.* **56** (2009), 41–82.
- [6] S. FUJIMORI, K. SAJI, M. UMEHARA AND K. YAMADA, Singularities of maximal surfaces, *Math. Z.* **259** (2008), 827–848.
- [7] C. GU, The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space, *Acta. Math. Sinica.* **1** (1985), 173–180.
- [8] C. GU, *A global study of extremal surfaces in 3-dimensional Minkowski space*, Differential geometry and differential equations (Shanghai, 1985), Lecture Notes in Math., 1255, Springer, Berlin, (1987), 26–33.
- [9] C. GU, *Extremal surfaces of mixed type in Minkowski space \mathbf{R}^{n+1}* , Variational methods (Paris, 1988), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **4**, Birkhauser Boston, Boston, MA, (1990) 283–96.
- [10] Y. W. KIM, S.-E. KOH, H. SHIN AND S.-D. YANG, Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae, *Journal of Korean Math. Soc.* **48** (2011), 1083–1100.
- [11] Y. W. KIM AND S.-D. YANG, Prescribing singularities of maximal surfaces via a singular Björling representation formula, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 2167–2177.
- [12] V. A. KLYACHIN, Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space, *Izv. Math.* **67** (2003), 209–224.
- [13] O. KOBAYASHI, Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3 , *Tokyo J. Math.* **6** (1983), 297–309.
- [14] N. SASAHARA, Spacelike helicoidal surfaces with constant mean curvature in Minkowski 3-space, *Tokyo J. Math.* **23** (2000), 477–502.
- [15] Y. UMEDA, Constant-Mean-Curvature Surfaces with Singularities in Minkowski 3-space, *Experiment. Math.* **18** (2009), 311–323.
- [16] M. UMEHARA AND K. YAMADA, Maximal surfaces with singularities in Minkowski space, *Hokkaido Math. J.* **35** (2006), 13–40.