Instability of p-Yang-Mills fields on submanifolds

東京理科大学大学院理工学研究科数学専攻　川越淳平

Yang-Mills 場 (すなわち $p=2$) の不安定性については, 小林-大仁田-竹内 [3] によって, 球面にはめ込まれたコンパクト極小部分多様体上の Yang-Mills 場が不安定になる為の条件が与えられ, 更に Yang-Mills 不安定なコンパクト既約対称空間の分類が与えられた. 一方, Yang-Mills 汎関数の自然な一般化である p-Yang-Mills 汎関数は Uhlenbeck によって導入され, Chen-Zhou [2] により $\mathbb{R}^{n+k}$ の n 次元部分多様体上の p-Yang-Mills 場が不安定になる為の条件が与えられた. ここでは, Chen-Zhou の結果をもとに, 小林-大仁田-竹内の結果を p-Yang-Mills 場へ拡張することを試みた研究経過について述べる.

$P(M,G)$ を構造群を G とするコンパクトリーマン多様体 M 上の主ファイバー束とし, $E = P\times_\rho V$ をベクトル空間 V をファイバーとする $P(M,G)$ に同伴するベクトル束とする. ここで, ρ は構造群 G の表現 $\rho: G\to GL(V)$ である. $\Omega^p(E)=\Gamma(\wedge^p T^*M\otimes E)$ を E に値をとる p 次微分形式の空間, ∇ を E の接続とする. また, $\mathcal{C}_E$ で E の接続全体を表すことにする. $\mathfrak{g}$ をリー群 G のリー環とし, $\mathfrak{g}_E = P\times_{Ad_G}\mathfrak{g}$ を随伴束とする. そして, 任意の $\nabla\in\mathcal{C}_E$ に対して, 曲率 $R^\nabla\in\Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ を $R^\nabla_{X,Y}=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}$ で定義する. G がコンパクトであれば Ad_G 不変な計量が $\mathfrak{g}_E$ に自然に入り, この計量は $\Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ 上の内積を誘導する. この計量を用いて, p-Yang-Mills 汎関数 ($p\geq 2$) が定義される.

定義 1 (p-Yang-Mills 接続)**.** $p\geq 2$ に対して,

$$YM_p(\nabla) := \frac{1}{p}\int_M \|R^\nabla\|^p$$

を p-Yang-Mills 汎関数と言う. $YM_p(\,\cdot\,)$ の臨界点 ∇ を p-Yang-Mills 接続, R^∇ を p-Yang-Mills 場と呼ぶ.

$\nabla^t := \nabla + A^t$ ($A^t\in\Omega^1(\mathfrak{g}_E), A^0=0$) とすると, ∇^t の曲率 R^{∇^t} は次で与えられる.

$$R^{\nabla^t} = R^\nabla + d^\nabla A^t + \tfrac{1}{2}[A^t\wedge A^t].$$

これより, $YM_p(\,\cdot\,)$ の第 1 変分公式を得る.

定義 2 ($YM_p(\,\cdot\,)$ の第 1 変分公式)**.**

$$\frac{d}{dt}YM_p(\nabla^t)|_{t=0} = \int_M \left\langle D, \delta^\nabla(\|R^\nabla\|^{p-2}R^\nabla)\right\rangle \ (D := \frac{d}{dt}\nabla^t|_{t=0})$$

ここで, d^∇ を ∇ の共変外微分とし, δ^∇ は d^∇ の随伴作用素である.

定義 3 ($YM_p(\cdot)$ の第 2 変分公式)**.**

$$\frac{d^2}{dt^2}YM_p(\nabla^t)|_{t=0} = (p-2)\int_M \|R^\nabla\|^{p-4}\left\langle d^\nabla D, R^\nabla\right\rangle^2 + \int_M \|R^\nabla\|^{p-2}\|d^\nabla D\|^2 + \int_M \left\langle [D\wedge D], R^\nabla\right\rangle \|R^\nabla\|^{p-2}$$

定義 4 (弱安定, 不安定)**.** p-Yang-Mills 接続 ∇ が, 任意の滑らかな接続 ∇^t ($|t|<\varepsilon, \nabla^0=\nabla$) の族に対して,

$$\frac{d^2}{dt^2}YM_p(\nabla^t)|_{t=0}\geq 0$$

を満たすとき, ∇ は弱安定と言い, 弱安定でないとき ∇ は不安定という. このとき, M 上の p-Yang-Mills 場 R^∇ は不安定であるともいう.

M^n を多様体 N^{n+k} の部分多様体とし, 第 2 基本形式を $h(\cdot,\cdot)$ で定義する. また, 添字の動く範囲を $1 \leq i,j \leq n; n+1 \leq \mu \leq n+k$ とし, N^{n+k} の局所的な正規直交標構を $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+k}\}$ ととる. ここで, $\{e_i \mid i = 1,2,\ldots,n\}$ を M の接方向, $\{e_\mu \mid \mu = n+1,\ldots,n+k\}$ を M の法方向とし, $h(e_i,e_j) = h^\mu_{ij} e_\mu$ と定義する. この定義にはアインシュタインの規約を用いている. また, $H^\mu = \sum_i h^\mu_{ii}$ と定義する.

定理 1 (Q. Chen and Z. R. Zhou [2]). $\mathbb{R}^{n+k}$ の部分多様体 M^n が, ある定数 $b<0$ に対して

$$(-H^\mu h^\mu_{jl} + 2h^\mu_{jm} h^\mu_{ml})\delta_{ki}\delta_{sr} + 2h^\mu_{ik} h^\mu_{jl}\delta_{sr} + 2(p-2)h^\mu_{ik} h^\mu_{sr}\delta_{jl} \leq b\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{sr}$$

を満たすならば, M^n 上の任意の p-Yang-Mills 場は不安定である.

定理 2 (S. Kobayashi, Y. Ohnita and M.Takeuchi [3]). M^n を半径 r の球面 $S^{n+k-1}(r)$ にはめ込まれたコンパクト極小部分多様体とする. M^n のリッチテンソルの最小固有値を c, 曲率作用素の最大固有値を μ とするとき,

$$\frac{n}{r^2} - 2c + 2\mu < 0$$

が成り立つならば, M^n 上の任意の Yang-Mills 場は不安定である.

この結果を用いることで, コンパクト既約対称空間の Yang-Mills 場の不安定性に関する結果が得られる.

定理 3 (S. Kobayashi, Y. Ohnita and M.Takeuchi [3]). M を標準計量 g_0 のコンパクト既約対称空間とする. λ_1 を M のラプラシアンの第 1 固有値, μ を M の曲率作用素の最大固有値とするとき,

$$\lambda_1 - 1 + 2\mu < 0$$

が成り立つならば, M は単連結で任意の Yang-Mills 場は不安定である.

球面にはめ込まれたコンパクト極小部分多様体上の p-Yang-Mills 場の不安定性について, 以下の結果を得た.

定理 4. M^n を半径 r の球面 $S^{n+k-1}(r)$ にはめ込まれたコンパクト極小部分多様体とする. M^n のリッチテンソルの最小固有値を c, 曲率作用素の最大固有値を μ, 主曲率の最大値 γ_1, 最小値 γ_2 に対して, $\gamma = \mathrm{Max}\{|\gamma_1|, |\gamma_2|\}$ とするとき,

$$\frac{n}{r^2} - 2c + 2\mu + 2(p-2)k\gamma^2 < 0$$

が成り立つならば, M^n 上の任意の p-Yang-Mills 場は不安定である.

参考文献

[1] J.P. Bourguignon and H. B. Lawson, Jr. Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields , Commun. Math. Phys. Vol. 79 NO.2 189-230 (1981).

[2] Q. Chen and Z. R. Zhou. On gap properties and instabilities of p-Yang Mills fields , Canad. J. Math. Vol.59 No.6, 1245-1259 (2007).

[3] S. Kobayashi, Y. Ohnita and M. Takeuchi. On instability of Yang-Mills connections , Math. Z. Vol. 193, 165-189 (1986).