

S^3 内の平坦トーラスに関する未解決問題

Flat tori in the unit 3-sphere and related open problems

北川義久 (宇都宮大学 教育学部)

1. 序

S^3 内の平坦トーラス . 3次元単位球面 S^3 内の (はめ込まれた) 2次元トーラス M を考える . S^3 の標準的なリーマン計量から M に誘導されるリーマン計量の曲率が 0 であるとき , M を S^3 内の平坦トーラスとよぶ . 例えば , $a^2 + b^2 = 1$ をみたす正定数 a, b について , \mathbb{R}^4 内の曲面 $S^1(a) \times S^1(b)$ を

$$(1.1) \quad S^1(a) \times S^1(b) = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = a^2, x_3^2 + x_4^2 = b^2\}$$

と定めると , この曲面は S^3 内の平坦トーラスである . これは S^3 内の Clifford トーラスとよばれている . また , 2次元単位球面 S^2 上の任意の閉曲線 γ に対して , Hopf 写像 $p : S^3 \rightarrow S^2$ による逆像 $p^{-1}(\gamma)$ も S^3 内の平坦トーラスである . これは閉曲線 γ に対応する Hopf トーラスとよばれている . 特に , γ が円であれば Hopf トーラス $p^{-1}(\gamma)$ は Clifford トーラス (1.1) と合同である .

さて , S^3 内には平坦トーラスがどのくらい多く存在するのだろうか . 1975年に Yau [8, p. 87] は「 S^3 内の平坦トーラスを分類せよ」という問題を提起した . この当時 , Hopf トーラス以外の例は知られていなかったが , Bianchi [1] と佐々木 [7] により , S^3 内の平坦曲面の構成法が知られていた .

Bianchi-佐々木の構成法 . M を S^3 内の完備平坦曲面とすると , M 上の任意の点 p に対して , p を通る M の漸近曲線が丁度 2本存在する . これらの曲線を S^3 内の曲線と考えると , 一方の捩率は 1 であり , 他方の捩率は -1 である . 捩率が 1 の漸近曲線を α , 捩率が -1 の漸近曲線を β とし , 4元数の積から定まる S^3 の群構造を用いて , $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$ を

$$(1.2) \quad F(s, t) = \alpha(s)\beta(t)$$

と定めると , F の像 $F(\mathbb{R}^2)$ は M と合同である . すなわち , 曲面 M は漸近曲線 α, β によって完全に決定される . 逆に , S^3 内の 2曲線 α, β を $\tau_\alpha = 1, \tau_\beta = -1$ であるように選び , $F(s, t) = \alpha(s)\beta(t)$ とおく . このとき , いくつかの条件を仮定すると , $F(s, t)$ は S^3 内の完備平坦曲面であり 2曲線 α, β はこの曲面の漸近曲線である .

Hopf トーラスの漸近曲線の周期性．Bianchi-佐々木の構成法により， S^3 内の平坦トーラスを作るためには， $\tau = \pm 1$ をみたす閉曲線を作ればよいことが分かる．Hopf トーラスの漸近曲線の挙動を調べることにより，このような閉曲線を作ることができる． S^2 上の単純閉曲線 $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq l$ を考え，Hopf トーラス $p^{-1}(\gamma)$ の漸近曲線 $c(s)$ を $p(c(s)) = \gamma(s)$ となるように選ぶと $\tau_c = 1$ である．そこで， $c(l) = c(0)$ となるような単純閉曲線 γ を探すため， $c(0)$ と $c(l)$ のずれを計算する．すると

$$(1.3) \quad c(l) = c(0) \exp(i(A + K)/2)$$

が得られる．ただし， $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ とみなしている．また， A は γ によって囲まれる面積であり， $K = \int_0^l \kappa(s) ds$ である（ただし， $\kappa(s)$ は $\gamma(s)$ の測地的曲率）．一方， S^2 における Gauss-Bonnet の定理より， $A + K = 2\pi$ だから，任意の γ に対して $c(l) = -c(0)$ であることが分かる．従って， γ の 2 周分に対応する漸近曲線はすべて閉じることが分かる．

S^3 内の平坦トーラスの構成法．上で述べた事実を利用すれば， S^2 上の閉曲線から S^3 内に $\tau = 1$ をみたす閉曲線を作ることができる．筆者 [3] は，このアイデアと Bianchi-佐々木の構成法を融合させることにより S^2 上の閉曲線対から S^3 内の平坦トーラスを構成する方法を開発した．この構成法により，Hopf トーラス以外にも S^3 内の平坦トーラスが存在することが示された．さらに， S^3 内の平坦トーラスはすべてこの方法で構成できることも分かり（定理 1），Yau により提起された問題は解決した．その後，この構成法を応用した研究成果が数多く得られ， S^3 内の平坦トーラスの研究は著しく進展した（詳しくは [5] を参照）．

本講演の目的．ここでは，まず， S^2 上の閉曲線対から S^3 内の平坦トーラスを構成する方法について説明する．次に，構成法の応用として， S^3 内に埋め込まれた平坦トーラスの対心不変性と Clifford トーラスの剛性について述べる．最後に，Clifford トーラスの剛性と密接に関係する未解決問題である直径予想について説明する．

2. S^3 内の平坦トーラスの構成法

\mathbb{H} を 4 元数全体の集合とし，以下のように \mathbb{R}^4 と \mathbb{H} を同一視する．

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}.$$

このとき，3 次元単位球面 $S^3 = \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$ は 4 元数の積によって群になる．また，2 次元単位球面 S^2 を $S^2 = \{x \in \text{Im } \mathbb{H} : |x| = 1\}$ と定め，写像 $p : S^3 \rightarrow S^2$ を

$$(2.1) \quad p(a) = a\mathbf{i}a^{-1} = \text{Ad}(a)\mathbf{i}$$

と定めると， $p : S^3 \rightarrow S^2$ は Hopf 写像である．さらに， S^2 の単位接束 US^2 を自然に直積 $S^2 \times S^2$ の部分集合とみなし，写像 $p_2 : S^3 \rightarrow US^2$ を

$$(2.2) \quad p_2(a) = (\text{Ad}(a)\mathbf{i}, \text{Ad}(a)\mathbf{j})$$

により定めると， $p_2 : S^3 \rightarrow US^2$ は 2 重被覆で

$$(2.3) \quad p_2(-a) = p_2(a)$$

を満たしている．また， $p_1 : US^2 \rightarrow S^2$ を自然な射影とすれば， $p = p_1 \circ p_2$ である．

ここで正則曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ を考えよう．単位接束 US^2 内の曲線 $\hat{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow US^2$ を

$$(2.4) \quad \hat{\gamma}(s) = (\gamma(s), \gamma'(s)/|\gamma'(s)|)$$

と定め， $c: \mathbb{R} \rightarrow S^3$ を 2 重被覆 $p_2: S^3 \rightarrow US^2$ による $\hat{\gamma}$ のリフトとする．このとき $c(s)$ は Hopf トーラス $p^{-1}(\gamma)$ の漸近曲線であることが証明できるので

$$c \text{ の捩率} = 1, \quad c^{-1} \text{ の捩率} = -1$$

であることが分かる．ここで $\gamma(s)$ は周期的であるとしよう． $l > 0$ を $\gamma(s)$ の基本周期とし，閉曲線 $\hat{\gamma}: [0, l] \rightarrow US^2$ が属するホモロジー類を $I(\gamma) \in H_1(US^2)$ とする．ところで， $H_1(US^2) \cong \mathbb{Z}_2$ だから， $I(\gamma) = 0$ または $I(\gamma) = 1$ であり，(2.3) から

$$(2.5) \quad c(s+l) = \begin{cases} c(s) & \cdots I(\gamma) = 0, \\ -c(s) & \cdots I(\gamma) = 1 \end{cases}$$

であることが分かる． $I(\gamma)$ を球面閉曲線 γ の \mathbb{Z}_2 -rotation index とよぶ．

以上の事実と Bianchi-佐々木の構成法を融合させることにより， S^3 内の平坦トーラスの構成法が得られる．まず，次の定義をおく．

定義． $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ が **periodic admissible pair** (p.a.p.) であるとは，次の条件 (a) と (b) を満たすことである．

- (a) $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ は周期的正則曲線，
- (b) 任意の $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ について $\kappa_1(s_1) > \kappa_2(s_2)$ ，ただし $\kappa_i(s)$ は $\gamma_i(s)$ の測地的曲率．

以下，p.a.p. $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ から S^3 内の平坦トーラスを構成する方法を説明しよう．曲線 $c_i: \mathbb{R} \rightarrow S^3$ を p_2 による $\hat{\gamma}_i: \mathbb{R} \rightarrow US^2$ のリフトとし， $F_\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$ を

$$(2.6) \quad F_\Gamma(s_1, s_2) = c_1(s_1)c_2(s_2)^{-1}$$

と定める．このとき， F_Γ ははめ込みであり， F_Γ により \mathbb{R}^2 に誘導されるリーマン計量 g_Γ の曲率は 0 であることが分かる．次に群 $G(\Gamma) = \{\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2) : F_\Gamma \circ \varphi = F_\Gamma\}$ を考えよう．群 $G(\Gamma)$ の元は \mathbb{R}^2 の平行移動であることが証明でき， $G(\Gamma)$ は自然に \mathbb{R}^2 の部分群となる．さらに $G(\Gamma)$ は \mathbb{R}^2 の lattice であることも分かり，平坦トーラス $M_\Gamma = (\mathbb{R}^2, g_\Gamma)/G(\Gamma)$ が得られる．さらに， \mathbb{R}^2 から M_Γ への自然な射影を π_Γ とすれば， $f_\Gamma \circ \pi_\Gamma = F_\Gamma$ を満たす等長はめ込み

$$(2.7) \quad f_\Gamma: M_\Gamma \rightarrow S^3$$

が得られる．実は， S^3 内の平坦トーラスは，すべてこのようにして構成できる．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 1 ([3]). M を平坦トーラスとし， $f: M \rightarrow S^3$ を等長はめ込みとする．このとき，p.a.p. Γ ，被覆写像 $\rho: M \rightarrow M_\Gamma$ および S^3 の合同変換 A が存在し $A \circ f = f_\Gamma \circ \rho$ が成り立つ．

注 1. $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とすると， $f_\Gamma(M_\Gamma)$ が Hopf トーラスと合同であるための必要十分条件は， γ_1 または γ_2 が円となることである．よって， S^3 内に Hopf トーラスと合同でない平坦トーラスを作ることができる．

3. S^3 に埋め込まれた平坦トーラス

$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とし, $I(\gamma_i)$ を γ_i の \mathbb{Z}_2 -rotation index とする. 結び目理論を用いることにより, 次の定理が得られる.

定理 2 ([4]). もし $f_\Gamma : M_\Gamma \rightarrow S^3$ が埋め込みならば, $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = 1$.

証明 (概略). まず, 埋め込み f_Γ を用いて, $M_\Gamma \subset S^3$ とみなす. さらに, M_Γ 上の点 p を選び, p を通る 2 本の漸近曲線を α, β とする. M_Γ 上の漸近曲線は単純閉曲線なので, α, β を M_Γ の単位法ベクトル方向にずらすことにより S^3 内の絡み目 (α, α^+) と (β, β^+) が得られる. このとき, 絡み数 $\text{lk}(\alpha, \alpha^+), \text{lk}(\beta, \beta^+)$ について

$$(3.1) \quad \text{lk}(\alpha, \alpha^+) \equiv \text{lk}(\beta, \beta^+) \equiv 1 \pmod{\mathbb{Z}_2}$$

であることが分かる. 次に, α, β のどちらとも交わらない円板 $D \subset M_\Gamma$ を選び, S^3 内の結び目 $K = \partial D$ を作る. K のアーフ不変量を $\text{Arf}(K) \in \mathbb{Z}_2$ とすると, K は自明な結び目なので $\text{Arf}(K) = 0$ である. 一方, M_Γ から D を取り除いて得られる曲面 V は K のザイフェルト曲面であるから, ホモロジー群 $H_1(V)$ の標準基を用いて $\text{Arf}(K)$ が計算できる. もし $(I(\gamma_1), I(\gamma_2)) \neq (1, 1)$ ならば, M_Γ の作り方から, α と β の交点は p だけであることが分かるので, α, β は $H_1(V)$ の標準基である. したがって, $\text{Arf}(K)$ の定義より

$$(3.2) \quad \text{Arf}(K) = \text{lk}(\alpha, \alpha^+) \text{lk}(\beta, \beta^+) \pmod{\mathbb{Z}_2}$$

である. よって, (3.1) と (3.2) より $\text{Arf}(K) = 1$ が得られ, $\text{Arf}(K) = 0$ に反する. 以上のことから, $(I(\gamma_1), I(\gamma_2)) = (1, 1)$ である. \square

定理 2 と (2.5) より, f_Γ が埋め込みならば f_Γ の像は S^3 の対心写像で不変である. よって, 定理 1 より, 次の定理が得られる.

定理 3 ([4]). $f : M \rightarrow S^3$ を平坦トーラス M の等長埋め込みとすると, f の像 $f(M)$ は S^3 の対心写像で不変である.

4. CLIFFORD トーラスの剛性に関する問題

ここでは, S^3 内の平坦トーラスの剛性について考察する. S^3 に埋め込まれた平坦トーラスは, もし Clifford トーラス (1.1) と合同でなければ, 等長変形可能であることが知られているので, 以下, Clifford トーラスの剛性について考える. Clifford トーラス (1.1) の包含写像を $i : S^1(a) \times S^1(b) \rightarrow S^3$ とすると, 次の補題が得られる.

補題 1 ([2]). $f : S^1(a) \times S^1(b) \rightarrow S^3$ を等長はめ込み, $\text{Diam}(f)$ を f の像の直径とする. もし $\text{Diam}(f) = \pi$ ならば, 等長変換 $A : S^3 \rightarrow S^3$ が存在し $f = A \circ i$ である.

定理 3 と補題 1 から, 次の剛性定理が得られる.

定理 4 ([2]). $f : S^1(a) \times S^1(b) \rightarrow S^3$ を等長埋め込みとすると, $f = A \circ i$ を満たす等長変換 $A : S^3 \rightarrow S^3$ が存在する.

問題. 定理 4 の仮定「埋め込み」を「はめ込み」に弱められるか?

次の予想が正しければ, 補題 1 により, この問題の答えは Yes である.

直径予想. $f : M \rightarrow S^3$ を平坦トーラスの等長はめ込みとすると $\text{Diam}(f) = \pi$.

5. 直径予想に関する結果

直径予想は今のところ未解決であるが，筆者は最近，東京工業大学の梅原雅顕氏との共同研究により，ある条件の下ではこの予想が正しいことを証明した．まず，直径予想と同値な予想である2重接触予想について説明しよう．

定義．二つの正則曲線 $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ ($i = 1, 2$) の組 (γ_1, γ_2) が第一種（第二種）の2重接触を持つとは，実数 a_1, b_1, a_2, b_2 と2点 $A, B \in US^2$ が存在して次の条件 (1) と (2) をみたすことである．

- (1) $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \hat{\gamma}_1(a_1) = \hat{\gamma}_2(a_2) = A, \hat{\gamma}_1(b_1) = \hat{\gamma}_2(b_2) = B,$
- (2) A から B に至る US^2 内の二つの道 $\hat{\gamma}_1|_{[a_1, b_1]}$ と $\hat{\gamma}_2|_{[a_2, b_2]}$ はホモトピー同値である（ホモトピー同値でない）．

補題 2 ([6]). $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とすると，次の (1) と (2) は同値である．

- (1) S^2 の等長変換 $\alpha \in SO(3)$ が存在して， $(\alpha\gamma_1, \alpha\gamma_2)$ は第二種の2重接触を持つ．
- (2) $\text{Diam}(f_\Gamma) = \pi.$

この補題と定理 1 により，直径予想は次の予想と同値であることが分かる．

2重接触予想．任意の p.a.p. $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ に対して， S^2 の等長変換 $\alpha \in SO(3)$ が存在して， $(\alpha\gamma_1, \alpha\gamma_2)$ は第二種の2重接触を持つ．

定理 5 ([6]). もし γ_1 と γ_2 の測地的曲率 κ_1 と κ_2 が

$$(5.1) \quad \kappa_1(s_1)\kappa_2(s_2) < -1 \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$$

をみたせば， $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ に対する2重接触予想は正しい．

注 2. $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とし， $f_\Gamma : M_\Gamma \rightarrow S^3$ の平均曲率を H_Γ とする．このとき，条件 (5.1) は $H_\Gamma < 0$ と同値である．

定理 5 を用いることにより，直径予想に関し，次の定理が得られる．

定理 6 ([6]). $f : M \rightarrow S^3$ を2次元平坦トーラス M の等長はめ込みとする．もし f の平均曲率 H が非負または非正ならば， $\text{Diam}(f) = \pi$ である．

参考文献

- [1] L. Bianchi, *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica*, Ann. Mat. Pura Appl. **24** (1896), 93–129.
- [2] K. Enomoto, Y. Kitagawa and J. L. Weiner, *A rigidity theorem for the Clifford tori in S^3* , Proc. A.M.S. **124** (1996), 265–268.
- [3] Y. Kitagawa, *Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3* , J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 457–476.
- [4] Y. Kitagawa, *Embedded flat tori in the unit 3-sphere*, J. Math. Soc. Japan, **47** (1995), 275–296.
- [5] 北川義久, 3次元球面内の平坦トーラス, 数学 **57** (2005), 164–177.
- [6] Y. Kitagawa and M. Umehara, *Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3* , Geometriae Dedicata **155** (2011), 105–140.
- [7] S. Sasaki, *On complete surfaces with Gaussian curvature zero in 3-sphere*, Colloq. Math., **26** (1972), 165–174.
- [8] S. T. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature II*, Amer. J. Math., **97** (1975), 76–100.