# On the representation of $SO(7)$-invariants by using $G_2$-invariants of curves in $\mathbf{R}^7$

大橋 美佐 (名古屋工業大学)

## 1 はじめに

本講演の内容は橋本英哉氏 (名城大学) との共同研究に基づく.

7 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^7$ 内の 2 つの曲線が向きを保つ等長変換 $\mathbf{R}^7 \rtimes SO(7)$ の作用で互いに移り合うとき $SO(7)$-合同であるという. 即ち, 2 曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}: I \to \mathbf{R}^7$ に対して, $g \in SO(7)$ と $a \in \mathbf{R}^7$, $s_0 \in \mathbf{R}$ が存在して

$$g \circ \gamma(s) + a = \tilde{\gamma}(s + s_0), \qquad (\text{ for } {}^{\forall} s \in I)$$

を満たすとき $\gamma$ と $\tilde{\gamma}$ は $SO(7)$-合同であるという. ここに $s(\in I)$ は $\gamma$ の弧長を表す. $\mathbf{R}^7$ 内の曲線の 6 個の曲率関数 $\{k_i\}_{i\in\{1,\ldots,6\}}$ は, $SO(7)$-不変量である. 即ち, 6 個の曲率関数が一致する曲線は, $SO(7)$-合同となる. 従って, $\mathbf{R}^7$ 内の曲線 $\gamma : I \to \mathbf{R}^7$ の $SO(7)$-合同類 $[\gamma]_{SO(7)}$ を

$$[\gamma]_{SO(7)} = \{\tilde{\gamma} : I \to \mathbf{R}^7 \mid \tilde{\gamma} \text{ は } \gamma \text{ と } SO(7)\text{-合同 }\}$$

とおくと, 合同類 $[\gamma]_{SO(7)}$ は

$$[\gamma]_{SO(7)} \cong \{(k_1, k_2, \ldots, k_6)\}$$

となる.

8 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^8$ 上に特殊な積構造を導入したケーリー代数を $\mathbf{O}$ とする. $\mathbf{O}$ の純虚数部分を $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ と表すと, $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ は標準内積を持つベクトル空間として $\mathbf{R}^7$ と同一視できる. ケーリー代数の積を保つ自己同型群として例外型単純リー群 $G_2$ を定義する. $G_2$ は $SO(7)$ の部分群となる. $\mathrm{Im}\,\mathbf{O} \cong \mathbf{R}^7$ 内の 2 つの曲線が $\mathrm{Im}\,\mathbf{O} \rtimes G_2$ の作用で移り合うとき, $G_2$-合同であるという. 曲線 $\gamma : I \to \mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ の $G_2$-合同類を

$$[\gamma]_{G_2} = \{\tilde{\gamma} : I \to \mathrm{Im}\,\mathbf{O} \mid \tilde{\gamma} \text{ は } \gamma \text{ と } G_2\text{-合同 }\}$$

とすると $[\gamma]_{G_2}$ は 6 個の $G_2$-不変量 $(k_1, \rho_1, \kappa_2, \alpha, \rho_3, \beta_1)$ と同一視することができる. 作用する群を $\mathbf{R} \rtimes SO(7)$ から $\mathrm{Im}\,\mathbf{O} \rtimes G_2$ に制限しているので,

$$[\gamma]_{SO(7)} = \bigcup_{\tilde{\gamma}\in[\gamma]_{SO(7)}} [\tilde{\gamma}]_{G_2}$$

となる. 本稿では $G_2$-不変量を用いて $SO(7)$-不変量を記述する方法を述べたい.

## 2 準備

四元数 $\mathbf{H}$ の直和 $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ に積構造 $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$ を導入した環をケーリー代数 $\mathbf{O}$ とよぶ. ここに $a, b, c, d \in \mathbf{H}$, $\varepsilon = (0, 1)$, ” $^-$ ” は $\mathbf{H}$ の共役を表す. $\mathbf{O}$ は非可換, 非結合的, 交代的な可除代数となる. $\mathbf{O}$ の積を保つ自己同型群を

$$G_2 = \{g \in SO(8) \mid g(uv) = g(u)g(v) \ \text{ for } {}^{\forall} u,\ v \in \mathbf{O}\} = Aut(\mathbf{O})$$

と定める. $g(1)=1$ より $G_2 \subset SO(7)$ である. $G_2$ は14次元のコンパクトな例外型単純Lie群となる.

$\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ 内の3次元ベクトル空間を $V$ とし, $u,\ v$ を互いに直交する $V$ の元とする. $V=\mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{u,\ v,\ u\times v\}$ となるとき $V$ を associative 3-plane とよび, その直交補空間を coassociative 4-plane とよぶ. ここに, $u\times v=\dfrac{1}{2}(\bar{v}u-\bar{u}v)$ であり, 外積を表す. $G_2=Aut(\mathbf{O})$ であるから, $G_2$ は associative 3-plane と coassociative 4-plane の分解を保つ. 即ち, 任意の $g\in G_2$ に対して $g(\mathrm{Im}\,\mathbf{H})$, $g(\mathbf{H}\varepsilon)$ はそれぞれ associative 3-plane, coassociative 4-plane となる.

## 3 曲線の $SO(7)$-不変量と $G_2$-不変量

$\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ 内の曲線に沿った $G_2$-frame field と $G_2$-不変量を定義し, 曲線の基本定理について述べる. $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ 内の2つの曲線を $\gamma,\ \tilde{\gamma}: I\to \mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ とする. $\gamma$ と $\tilde{\gamma}$ が $G_2$(resp. $SO(7)$)-合同であるとは $g\in G_2$(resp. $SO(7)$), $a\in\mathbf{R}^7$, $s_0\in\mathbf{R}$ が存在して $g\circ\gamma(s)+a=\tilde{\gamma}(s+s_0)$ を満たすことをいう. ここに $s$ は弧長を表す. 曲線は $C^\infty$ 級であると仮定し, 曲線 $\gamma$ に沿った Frenet frame field を $(v_1,\,v_2,\,\ldots,\,v_7)$ を

$$\begin{aligned}
&v_1=\gamma'\left(=\frac{d\gamma}{ds}\right),\quad v_2=\frac{v_1'}{k_1},\quad k_1=\|v_1'\|,\\
&v_i=\frac{1}{k_i}\left(v_{i-1}'-\left\langle v_{i-1}',\ v_{i-2}\right\rangle v_{i-2}\right),\\
&k_{i-1}=\left(\|v_{i-1}'\|^2-\left\langle v_{i-1}',\ v_{i-2}\right\rangle^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

と定める. ここに $^\forall i\in\{3,\,4,\,5,\,6\}$ を表し, $k_1,\ldots,k_5$ は $I$ 上の正値関数と仮定している. 関数 $k_i$ を第 $i$ 曲率といい, これらの 6 個の関数は $SO(7)$-不変量となる. $SO(7)$-合同定理は標準的な Frenet-Serre の公式から得られ, $\mathbf{R}^7$ 内の曲線 $\gamma: I\to\mathbf{R}^7$ の $SO(7)$-合同類 $[\gamma]_{SO(7)}$ は

$$[\gamma]_{SO(7)}\cong\{(k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_6)\}$$

となる.

次に曲線に沿った $G_2$ frame field $(e_4\ e_1\ e_2\ e_3\ e_5\ e_6\ e_7)$ を以下のように定める.

$$\begin{aligned}
&e_4=v_1,\quad e_1=v_2,\quad e_5=e_1\times e_4,\\
&e_2=\frac{1}{\kappa_2}({e_1}'-\left\langle e_1'(s),e_4(s)\right\rangle e_1-\left\langle e_1'(s),e_5(s)\right\rangle e_5),\\
&e_3=e_1\times e_2,\quad e_6=e_2\times e_4,\quad e_7=e_3\times e_4.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

ここに $\kappa_2(s)=\sqrt{\|e_1'(s)\|^2-\langle e_1'(s),e_4(s)\rangle^2-\langle e_1'(s),e_5(s)\rangle^2}>0$ と仮定していることに注意する. このとき次の微分方程式を満たす.

$$\frac{d}{ds}(e_4\ e_1\ \cdots\ e_7)=(e_4\ e_1\ \cdots\ e_7)\left(\begin{array}{c|c|c}0&-{}^t\mu&0_{1\times3}\\\hline \mu&A&-{}^tB\\\hline 0_{3\times1}&B&A\end{array}\right),$$

ここに, $\mu = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_2 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & \beta_2 \\ 0 & \beta_1 & \rho_3 \end{pmatrix}$ を表す. さらに, $\rho_i, \beta_i, k_1$ は次の関係式を満たす.

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0, \quad \beta_1 - \beta_2 - k_1 = 0.$$

6 個の関数の組 $(k_1,\ \kappa_2,\ \rho_1,\ \rho_3,\ \alpha,\ \beta_1)$ を $G_2$-(完全) 不変量とよぶ. 実際, 次の $G_2$-合同定理が成立する.

**定理 1** [2] $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ 内の 2 つの曲線を $\gamma,\ \tilde{\gamma} : I \to \mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ とし, $(k_1,\ \kappa_2,\ \rho_1,\ \rho_3,\ \alpha,\ \beta_1)$, $(\tilde{k_1},\ \tilde{\kappa_2},\ \tilde{\rho_1},\ \tilde{\rho_3},\ \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta_1})$ をそれぞれ曲線 $\gamma$ と $\tilde{\gamma}$ の $G_2$-不変量とする. このとき $\gamma$ と $\tilde{\gamma}$ が $G_2$-合同であることと 6 個の $G_2$-(完全) 不変量がそれぞれ一致することは同値である. 即ち,

$$k_1 = \tilde{k_1},\ \kappa_2 = \tilde{\kappa_2},\ \rho_1 = \tilde{\rho_1},\ \rho_3 = \tilde{\rho_3},\ \alpha = \tilde{\alpha},\ \beta_1 = \tilde{\beta_1}.$$

従って曲線 $\gamma : I \to \mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ の $G_2$-合同類 $[\gamma]_{G_2}$ は

$$[\gamma]_{G_2} \cong \{(k_1,\ \kappa_2,\ \rho_1,\ \rho_3,\ \alpha,\ \beta_1)\}$$

となる. $G_2$ は $SO(7)$ の部分群であるから, $\gamma$ と $\tilde{\gamma}$ が $G_2$-合同ならば, $SO(7)$-合同となる. ゆえに

$$[\gamma]_{SO(7)} = \bigcup_{\tilde{\gamma} \in [\gamma]_{SO(7)}} [\tilde{\gamma}]_{G_2}$$

となる.

# 4 曲線の $G_2$-不変量を用いた $SO(7)$-不変量の計算方法

$G_2$ は $SO(7)$ の部分群なので, 曲線の $G_2$-不変量を用いて $SO(7)$-不変量が記述できる. 一般に $\mathbf{R}^7$ の正規直交基底を $G_2$ の作用で標準化すると 7 次元実射影空間 $\mathbf{RP}^7$ の自由度がある. 実際, 曲線に沿った Frenet frame field $(v_1,\ \cdots,\ v_7)$ を用いて

$$\begin{aligned} &\cos\sigma = \langle v_3, v_2 \times v_1 \rangle, \\ &a_{i1} = \langle v_{i+3}, v_2 \times v_1 \rangle, \quad a_{i2} = \langle v_{i+3}, v_3 \times v_2 \rangle, \\ &a_{i3} = \langle v_{i+3}, v_3 \times v_1 \rangle, \quad a_{i4} = \langle v_{i+3}, (v_3 \times v_2) \times v_1 \rangle, \end{aligned} \tag{4.1}$$

と定める. このとき曲線に沿った $G_2$-frame field $(e_4,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_5,\ e_6,\ e_7)$ の構成法から

$$(e_4,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_5,\ e_6,\ e_7) = (v_1,\ \cdots,\ v_7)M,$$

となる. ここに,

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\sin\sigma| & 0 & \cos\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\cos\sigma}{|\sin\sigma|}a_{11} & -\frac{a_{12}}{|\sin\sigma|} & a_{11} & \frac{a_{13}}{|\sin\sigma|} & -\frac{a_{14}}{|\sin\sigma|} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{\cos\sigma}{|\sin\sigma|}a_{21} & -\frac{a_{22}}{|\sin\sigma|} & a_{21} & \frac{a_{23}}{|\sin\sigma|} & -\frac{a_{24}}{|\sin\sigma|} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos\sigma}{|\sin\sigma|}a_{31} & -\frac{a_{32}}{|\sin\sigma|} & a_{31} & \frac{a_{33}}{|\sin\sigma|} & -\frac{a_{34}}{|\sin\sigma|} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos\sigma}{|\sin\sigma|}a_{41} & -\frac{a_{42}}{|\sin\sigma|} & a_{41} & \frac{a_{43}}{|\sin\sigma|} & -\frac{a_{44}}{|\sin\sigma|} \end{array}\right)$$

を表す．さらに (3.1), (4.1) から, $G_2$-(完全) 不変量は

$$\begin{cases} k_1 = \|e_4{}'\|, \\ \rho_1 = \langle e_1',\ e_5\rangle = k_2\cos\sigma, \\ \kappa_2 = \sqrt{\|e_1'\|^2 - \langle e_1',\ e_4\rangle^2 - \langle e_1', e_5\rangle^2} = k_2|\sin\sigma|, \\ \alpha = \langle e_2',\ e_3\rangle = -\dfrac{k_3 a_{12}}{\sin^2\sigma}, \\ \rho_3 = \langle e_3',\ e_7\rangle = -\dfrac{k_3 a_{13}}{\sin^2\sigma}, \\ \beta_1 = \langle e_2',\ e_7\rangle = -\dfrac{k_3 a_{14}}{\sin^2\sigma}. \end{cases} \tag{4.2}$$

と表せる．ここで $\mathscr{A}_\sigma(s) = \dfrac{1}{|\sin\sigma|}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44}\end{pmatrix}$ は $SO(4)$ に値を持つ関数であることに注意する.

**注意 1** [1]

$$S^1 \times SO(4)/\mathbf{Z}_2 \cong SO(7)/G_2 = \mathbf{RP}^7.$$

従って $M(s)$ は $\mathbf{RP}^7$ に値を持つ関数となる.

上記から $M$ の成分は $G_2$-不変量 $(k_1,\ \kappa_2,\ \rho_1,\ \rho_3,\ \alpha,\ \beta_1)$ とその微分だけで表せる．実際, (4.2) から,

$$k_2 = \sqrt{{\kappa_2}^2 + {\rho_1}^2}$$

となり

$$\cos\sigma = \frac{\rho_1}{\sqrt{{\kappa_2}^2 + {\rho_1}^2}}, \quad \sin\sigma = \frac{\kappa_2}{\sqrt{{\kappa_2}^2 + {\rho_1}^2}}$$

と表せる.

次に第 3 曲率を $k_3$ を求める．Frenet-Serret の公式から, $\cos\sigma$ の微分は

$$(\cos\sigma)' = \langle v_3,\ v_2 \times v_1\rangle' = k_3\langle v_4,\ v_2 \times v_1\rangle = k_3 a_{11}$$

となる．$\displaystyle\sum_{j=1}^{4}(a_{1j})^2 = \sin^2\sigma$ より,

$$k_3 = \frac{\sqrt{(\kappa_2{}'\rho_1 - \kappa_2\rho_1{}')^2 + {\kappa_2}^2({\rho_1}^2 + {\kappa_2}^2)({\rho_3}^2 + \alpha^2 + {\beta_1}^2)}}{{\rho_1}^2 + {\kappa_2}^2},$$

$$a_{11} = \frac{1}{k_3}\frac{\kappa_2(\kappa_2\rho_1{}' - \rho_1\kappa_2{}')}{({\rho_1}^2 + {\kappa_2}^2)^{3/2}}, \qquad a_{12} = -\frac{1}{k_3}\frac{\alpha{\kappa_2}^2}{{\rho_1}^2 + {\kappa_2}^2},$$

$$a_{13} = -\frac{1}{k_3}\frac{\rho_3{\kappa_2}^2}{{\rho_1}^2 + {\kappa_2}^2}, \qquad a_{14} = -\frac{1}{k_3}\frac{\beta_1{\kappa_2}^2}{{\rho_1}^2 + {\kappa_2}^2}$$

となり, $k_3$ と $|\sin\sigma|\mathscr{A}_\sigma$ の 1 行目の成分が求まる. 同様に, 微分と $\mathscr{A}_\sigma$ が $SO(4)$ に値を持つ関数であることから

$$
\begin{aligned}
k_4 &= \frac{{\kappa_2}^2+{\rho_1}^2}{{\kappa_2}^2}\Big\{\big((a_{11})'+k_3\cos\sigma-k_2a_{13}\big)^2+\big((a_{12})'+k_1a_{13}\big)^2\\
&\qquad +\big((a_{13})'+k_2a_{11}-k_1a_{12}\big)^2+\big((a_{14})'\big)^2\Big\}^{1/2},\\
k_5 &= \frac{{\kappa_2}^2+{\rho_1}^2}{{\kappa_2}^2}\Big\{\big((a_{21})'+k_4a_{11}-k_2a_{23}\big)^2\\
&\qquad +\big((a_{22})'+k_4a_{12}+k_1a_{23}-k_3\langle v_5, v_4\times v_2\rangle\big)^2\\
&\qquad +\big((a_{23})'+k_4a_{13}+k_2a_{21}+k_1a_{22}-k_3\langle v_5, v_4\times v_1\rangle\big)^2\\
&\qquad +\big((a_{24})'+k_4a_{14}-k_3\langle v_5, (v_4\times v_2)\times v_1\rangle\big)^2\Big\}^{1/2},\\
k_6 &= \frac{{\kappa_2}^2+{\rho_1}^2}{{\kappa_2}^2}\Big\{\big((a_{31})'+k_5a_{21}-k_2a_{33}\big)^2\\
&\qquad +\big((a_{32})'+k_5a_{22}+k_1a_{33}-k_3\langle v_6, v_4\times v_2\rangle\big)^2\\
&\qquad +\big((a_{33})'+k_5a_{23}+k_2a_{31}+k_1a_{32}-k_3\langle v_6, v_4\times v_1\rangle\big)^2\\
&\qquad +\big((a_{34})'+k_5a_{24}-k_3\langle v_6, (v_4\times v_2)\times v_1\rangle\big)^2\Big\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

となる. ここで,

$$
\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{(a_{11})'+k_3\cos\sigma-k_2a_{13}}{k_4}, \qquad a_{22}=\frac{(a_{12})'+k_1a_{13}}{k_4},\\
a_{23} &= \frac{(a_{13})'+k_2a_{11}-k_1(a_{12})}{k_4}, \qquad a_{24}=\frac{(a_{14})'}{k_4},\\
\langle v_5,\ v_4\times v_2\rangle &= -\frac{1}{\sin^2\sigma}\left(\cos\sigma\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{vmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

等のように $|\sin\sigma|\mathscr{A}_\sigma$ の各成分は $G_2$-不変量とその微分を用いて記述できる. 以上のことから, 次の結果を得る.

**定理 2** $\mathbf{R}^7$ 内の曲線の各 $SO(7)$-不変量 (曲率) $k_i$ を 6 個の $G_2$-不変量 ($k_1$, $\rho_1$, $\kappa_2$, $\alpha$, $\rho_3$, $\beta_1$) を用いて計算するシステムが与えられる.

$$k_i = k_i(k_1,\,\rho_1,\,\kappa_2,\,\alpha,\,\rho_3,\,\beta_1) \qquad i\in\{1,\,\ldots,\,6\}.$$

# References


[1] H. Hashimoto and M. Ohashi, On fibre bundle structures of Stiefel manifolds related to the octonions, To appear in Topology and its Applications.

[2] M. Ohashi, $G_2$-congruence theorem for curves in purely imaginary octonions and its application, Geometriae Dedicata. 2013 163: pp. 1–17.