対称空間論の離散化とカンドル代数, Part II *

田丸 博士 † (広島大学大学院理学研究科)

概要

カンドル (quandle) は, Joyce によって導入された代数系であり, 主として結び目の研究に用いられてきた. 我々の研究テーマは, カンドルを離散的な対称空間と考え, 対称空間論を参考にして, その構造理論を構築することである. 本稿では, 我々の研究の解説の Part II として, 二点等質カンドルおよび平坦カンドルの概念および得られている結果を紹介する.

1 導入

我々はカンドルを対称空間論の視点から研究している. 本稿は, このような研究の概要を紹介することを目的としている. なお, 本稿の直前に, Part I と題した原稿 ([7]) を執筆したので, 興味のある方は参照して頂きたい.

カンドルは, 結び目の研究の過程で Joyce ([3]) によって導入された代数系である. 元々の定義は二項演算の形で与えられているが, ここでは, 二項演算を “各点に写像を与える対応” に置き換えたものを定義として紹介する.

定義 1.1. X を集合とし, 写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ を考える. このとき, (X, s) が **カンドル** とは, 以下が成り立つこと:

(S1) $\forall x \in X$, $s_x(x) = x$.

(S2) $\forall x \in X$, s_x は全単射.

(S3) $\forall x, y \in X$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

ここで, $\mathrm{Map}(X, X)$ は X から X への写像全体の集合を表すものとする. 以下では, 対応 $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ を用いて, カンドルを (X, s) で表すことにする. また, このとき

* 部分多様体論・湯沢 2014 記録集

† tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

の s をカンドル構造と呼ぶ. このような定式化をすると, 対称空間と関連することは自然に思える. 実際, 以前から次が知られていた.

命題 1.2 (Joyce ([3])). 連結リーマン対称空間はカンドルである.

従って, カンドルは対称空間の一般化である. 特にカンドルは, 対称空間の点対称だけを抽出し, (リーマン) 多様体あるいは位相などの構造を全て忘れたものだと考えることができる. 我々の研究手法は, カンドルを対称空間の "離散化" と考えて, 対称空間論における概念や道具を適用するというものである.

一方で, 連結な k-対称空間やアフィン対称空間もカンドルであることが分かる. ここで, (X, s) をカンドルとしたとき, s_x は対合的である必要はない (一般には有限位数を持つとすら限らない) ことに注意する. これらのことから, 何の制約も付けずにカンドルの一般論を考えると, その対象が広くなり過ぎることが予想される. 従ってまずは, カンドルに対して "良いクラス" を考える必要がある. 本稿で扱う二点等質カンドルや平坦カンドルは, そのような取り組みの橋頭堡になると考えている.

2 準備

ここではカンドルに関する基本的な概念や例を紹介する.

定義 2.1. カンドル間の写像 $f : (X, s^X) \to (Y, s^Y)$ が **準同型** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $f \circ s_x^X = s_{f(x)}^Y \circ f$. また, カンドル間の写像が **同型** であるとは, 全単射かつ準同型となること.

定義より, 各 $x \in X$ に対して, $s_x : X \to X$ はカンドルの自己同型写像となる. このことを用いて, カンドルに付随する三種類の群と, それらに付随する概念を定義する. 以下では, 記号 $\langle \cdot \rangle$ によって生成される群を表す.

定義 2.2. カンドル (X, s) に対して, 以下を定義する:

(1) (X, s) 上の自己同型写像全体の集合を $\mathrm{Aut}(X, s)$ で表し, **自己同型群** と呼ぶ. また, (X, s) が **等質** とは, $\mathrm{Aut}(X, s)$ が X に推移的に作用すること.

(2) $\mathrm{Inn}(X, s) := \langle \{s_x \mid x \in X\} \rangle$ を **内部自己同型群** と呼ぶ. また, (X, s) が **連結** とは, $\mathrm{Inn}(X, s)$ が X に推移的に作用すること.

(3) $G^0(X, s) := \langle \{s_x \circ s_y \mid x, y \in X\} \rangle$ を **変位の群** と呼ぶ.

注意 2.3. 定義から明らかに次が成り立つ:

$$G^0(X,s) \subset \mathrm{Inn}(X,s) \subset \mathrm{Aut}(X,s).$$

従って, 連結ならば等質である. また, $G^0(X,s)$ が X に推移的に作用することと, カンドル (X,s) が連結であることは同値となる.

上記の三つの群の差異を表す最も典型的な例は, 二面体カンドルであると思われる. 二面体カンドルは, 後の平坦カンドルの章でも登場するので, 少し詳しく解説する.

例 2.4. S^1 を $\mathbb{R}^2$ 内の原点 o 中心の単位円とし, X を S^1 上の n 等分点の集合とする. このとき, 各 $x \in X$ に対して, s_x を直線 ox に関する折り返しとすると, (X,s) はカンドルになる (これを **二面体カンドル** と呼び, R_n で表す). さらに以下が成り立つ:

- $G^0(R_n)$ は, 角度 $4\pi/n$ の回転の生成する $\mathrm{SO}(2)$ 内の部分群.
- $\mathrm{Inn}(R_n)$ は, $G^0(X,s)$ と然るべき折り返しの生成する $\mathrm{O}(2)$ 内の部分群.
- $\mathrm{Aut}(R_n)$ は, X を保つ $\mathrm{O}(2)$ 内の部分群を含む.

すなわち $G^0(X,s)$ は, X の点を "一つ飛ばしに" 移す回転で生成される. 一方で, $\mathrm{Aut}(R_n)$ は X の点を "隣に移す" 回転を含む. これらのことから, 次が分かる.

命題 2.5. 二面体カンドル R_n は等質である. また, R_n が連結であるための必要十分条件は, n が奇数となること.

3　二点等質カンドル

ここでは, [6] において定義された二点等質カンドルを紹介し, 有限な場合の分類結果を述べる. 二点等質カンドルは, 二点等質なリーマン多様体の類似物である. また, 言うまでもないが, 二点等質は two-point homogeneous の直訳である.

定義 3.1 ([6])**.** カンドル (X,s) (ただし $\#X \geq 3$) が次をみたすとき **二点等質** であるという: 相異なる二点の組が内部自己同型で移り合う, すなわち, $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in X \times X$ $(x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2)$, $\exists f \in \mathrm{Inn}(X,s) : (f(x_1),f(x_2)) = (y_1,y_2)$.

ここで, リーマン多様体 (M,g) が二点等質であるとは, 等距離にある二点の組が等長変換で移り合うことであった. カンドルの場合には, 距離が定義されていないので, 二点等質性を「等距離にある」という情報を落として定義している.

注意 3.2. 二点等質リーマン多様体は, $\mathbb{R}^n$ または階数 1 対称空間に限ることが知られており, 対称空間の中で最も基本的なクラスを成す. カンドルは対称空間の離散化と考えられるので, 二点等質カンドルは階数 1 対称空間の離散化と考えることができる. ただし, 階数 1 対称空間のような重要な役割を演じるかどうかは, 今後の研究次第である.

二点等質カンドルの条件は, 極めて強い. 例えば, 位数 3 の二面体カンドルは二点等質であるが, $n \geq 4$ のとき R_n は二点等質でない. しかし, 実は二点等質カンドルは無限に存在することが分かる. その結果を述べるために, カンドル組の概念を復習しておく (詳細は [7] での解説を参照). 群 G の群としての自己同型群を $\mathrm{Aut}(G)$ で表す.

定義 3.3. G を群, K を G 内の部分群とし, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ とする. このとき (G, K, σ) が **カンドル組** とは, 次が成り立つこと: $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$.

ここで $\mathrm{Fix}(\sigma, G)$ は, σ による固定点集合を表す. 一般に, 等質カンドルとカンドル組が対応することが知られている. ここでは, そのうち必要な部分だけを紹介する.

命題 3.4. (G, K, σ) をカンドル組とする. このとき, $X := G/K$ とおき, s を次で定めると, (X, s) は等質なカンドルとなる: $s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)]$.

カンドル組 (G, K, σ) から構成されるカンドルを便宜的に $Q(G, K, \sigma)$ で表すことにする. この記号を用いて, 二点等質カンドルの分類結果を述べることができる.

定理 3.5 ([2, 6, 8, 9])**.** (X, s) を有限カンドルとする. このとき (X, s) が二点等質であるための必要十分条件は, カンドル $Q(\mathbb{F}_q, \{0\}, L_a)$ と同型であること. ただしここで, $\mathbb{F}_q$ は位数 q の有限体, a は $\mathbb{F}_q$ の原始根であり, L_a は a の $\mathbb{F}_q$ への左乗法作用を表す.

ここで $\mathbb{F}_q$ は加法群とみなしている. 上記のような $Q(\mathbb{F}_q, \{0\}, L_a)$ (ただし a は原始根である必要はない) は **Alexander カンドル** と呼ばれることが多い.

注意 3.6. 上記の定理に関わる 4 つの論文について, 簡単に紹介する. まず [6] において, 二点等質カンドル (X, s) が定義され, $\#X$ が素数の場合の分類が与えられた. この結果を拡張して, 岩永 ([2]) は $\#X$ が素数の二乗の場合の分類を与えた. Vendramin ([8]) は, 有限群の作用の理論を用いて次を示した: (X, s) が有限かつ二点等質ならば, $\#X$ は素数冪である (ちなみに, この事実は [4] に予想として述べられている). さらにこれとは独立に, 和田 ([9]) は $\#X$ が素数冪となる二点等質カンドル (X, s) を分類した. これらを合わせることで, 上記の定理が証明される. ちなみに和田 ([9]) の議論は, [2, 6] のものを完全に含んでいることを注意しておく.

注意 3.7. 有限カンドル (X, s) (ただし $n := \#X \geq 3$) が **巡回型** であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, s_x の $X \setminus \{x\}$ への作用が位数 $n-1$ の巡回置換であることを言う. このとき, 巡回型ならば二点等質であることは比較的容易に分かる ([6]). 一方で, 上記の定理 3.5 の帰結として「有限な二点等質カンドルは巡回型に限る」ことも従う. しかし, 分類した結果そうなっていたという議論であり, その仕組みは未解明である.

4 平坦カンドル

ここでは, カンドルに対して平坦性の概念を定義し, 有限かつ連結な平坦カンドルの分類を紹介する.

定義 4.1. 連結カンドル (X, s) が **平坦** とは, 変位の群 $G^0(X, s)$ が可換となること.

ここで変位の群とは, $G^0(X, s) := \langle \{s_p \circ s_q \mid p, q \in X\} \rangle$ のことであった. カンドルの平坦性の定義は, リーマン対称空間に対する次の結果に触発されたものである.

定理 4.2 ([5], Chapter III, Proposition 2.5)**.** 連結リーマン対称空間 (M, g) が平坦 (すなわちリーマン曲率が恒等的に 0) であるための必要十分条件は, 群 $\langle \{s_p \circ s_q \mid p, q \in M\} \rangle$ が可換となることである.

例 2.4 より, 二面体カンドル R_n の変位の群 $G^0(R_n)$ は SO(2) の部分群であるので, 可換である. このことから, 次が直ちに従う.

例 4.3. 二面体カンドル R_n は平坦である.

ここで, カンドル (X, s^X), (Y, s^Y) に対して, その直積カンドルを考える. カンドルの直積とは, $X \times Y$ 上にカンドル構造を以下で定めたものである:

$$s_{(x,y)} := s^X_x \times s^Y_y : X \times Y \to X \times Y \quad (x \in X, y \in Y).$$

例 4.4. 平坦なカンドルと平坦なカンドルの直積は平坦である.

従って二面体カンドルの直積は平坦である. 実は, 平坦な有限連結カンドルはそれらで尽きることが分かる.

定理 4.5 ([1])**.** 連結な有限カンドル (X, s) が平坦であるための必要十分条件は, (X, s) が奇素数冪位数の二面体カンドルの直積と同型となること, すなわち, $\exists q_1, \ldots, q_n$: 奇素数冪 s.t. $(X, s) \cong R_{q_1} \times \cdots \times R_{q_n}$.

必要性の証明は容易．十分性の証明には, 群論を用いる．すなわち, 平坦カンドルの問題をカンドル組の問題に帰着させて, 有限可換群の分類定理を適用し, 付随する準同型を調べる, という方針で示される．

注意 4.6. 平坦なコンパクト連結リーマン対称空間はトーラス (すなわち S^1 の直積) となることが知られている．二面体カンドルは "離散的な S^1" と考えることができるので, 定理 4.5 はその自然な一般化であると考えられる．

注意 4.7. 我々は平坦な連結有限カンドルの分類を行ったが, 平坦な等質有限カンドルも興味深い対象である．当然ながら, 偶数位数の二面体カンドルの直積は, 連結でない平坦な等質有限カンドルである．しかしそれだけではなく, カンドルの "半直積" のような例も存在することが分かっている．それらの例は, カンドルとしても, また対称空間論との関連からしても, 極めて興味深いと考えている．

参考文献

[1] Ishihara, Y., Tamaru, H.: *Flat connected finite quandles*, in preparation.

[2] 岩永 翔: 位数 p^2 の two-point homogeneous カンドルの分類, 修士論文, 東京理科大学理工学研究科, 2013/03.

[3] Joyce, D.: *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), 37–65.

[4] Kamada, S., Tamaru, H., Wada, K.: *On classification of quandles of cyclic type*, preprint, arXiv:1312.6917.

[5] Loos, O.: *Symmetric Spaces, I: General Theory.* Benjamin, New York (1969).

[6] Tamaru, H.: *Two-point homogeneous quandles with prime cardinality*, J. Math. Soc. Japan **65** (2013), 1117–1134.

[7] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part I, 福岡大学微分幾何研究会 (2014) 報告集, to appear.
`http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/kenkyu/talk2014-5.html`

[8] Vendramin, L.: *Doubly transitive groups and cyclic quandles*, J. Math. Soc. Japan, to appear.

[9] Wada, K.: *Two-point homogeneous quandles with cardinality of prime power*, Hiroshima Math. J., to appear.