

# 半正定値計量と曲面の特異点

梅原 雅顕 (東京工業大学・情報理工学研究所)\*

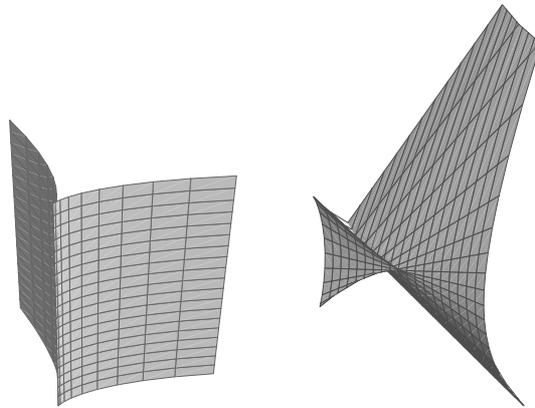


図 1: カスプ辺とツバメの尾

## 1. 波面に関するガウス・ボンネ型定理

2次元多様体  $M^2$  から3次元 Euclid 空間  $\mathbf{R}^3$  への  $C^\infty$ -写像  $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  において, 写像がはめ込みでなくなる点のことを特異点といい, 特異点でない点を正則点という. 一般に特異点においては, 曲面の単位法線ベクトル場  $\nu$  は特異点まで滑らかに拡張されるとは限らないが, すべての特異点の近傍で単位法線ベクトル場が, 特異点をこめて滑らかに定まる場合に, 写像  $f$  は波面的である, という. さらにもしも  $f$  と  $\nu$  の対として定まる写像

$$L := (f, \nu) : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$$

がはめ込みとなるとき,  $f$  を波面という. ここで  $S^2$  を単位球面を表す. 図1のカスプ辺とツバメの尾は, 波面に現れる代表的な特異点である. 特に, カスプ辺は, 特異点の像が空間正則曲線となり, その曲率関数の単位法線ベクトルに直交する方向の成分に正負の符号をつけるとカスプ辺に沿って, 特異曲率  $\kappa_s$  を定義することができる. 特異曲率の厳密な定義は文献 [11] を参照せよ. 図2左のカスプ辺は特異曲率が負, 図2右のカスプ辺は特異曲率が正である.

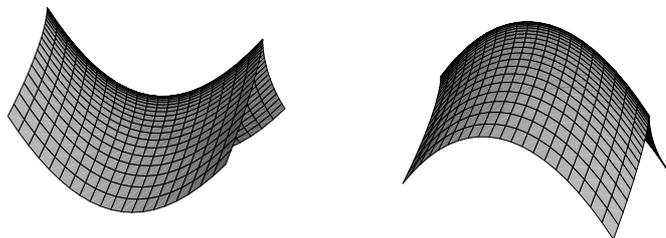


図 2: 負と正のカスプ辺

いま,  $M^2$  を向きづけられた2次元多様体とし,  $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面とする. さらに  $f$  は  $M^2$  上大域的に定義された滑らかな単位法線ベクトル場  $\nu$  を許容しているとする.

\*e-mail: umehara@is.titech.ac.jp

$(U : u, v)$  を  $M^2$  の向きに同調した局所座標とすると、与えられた波面  $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$$

のことを、局所座標系に付随した符号付き面積密度関数とよぶ。このとき

$$d\hat{A} := \lambda du \wedge dv \quad (1)$$

$$dA := |\lambda| du \wedge dv \quad (2)$$

のことを、それぞれ符号付き面積要素および面積要素という。両者は共に局所座標系に依存しない  $M^2$  上の連続な 2-form を定めるが、特に  $d\hat{A}$  は  $M^2$  上で滑らかである。2 つの面積要素を用いて、 $M^2$  の以下の 2 つの閉集合を定義する。

$$M_+ := \{p \in M^2; d\hat{A}_p = dA_p\},$$

$$M_- := \{p \in M^2; d\hat{A}_p = -dA_p\}.$$

$M_+$  は  $\nu$  の向きと  $M^2$  の向きが同調するような集合を表し、 $M_-$  は  $\nu$  の向きと  $M^2$  の向きが同調しない集合とみなせる。そして共通部分

$$\Sigma := M_+ \cap M_-$$

は、波面  $f$  の特異点集合に一致する。この状況で、以下の Gauss-Bonnet 型の公式が知られている。

**Fact 1**  $M^2$  がコンパクトのとき、もしも波面  $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  が、大域的な単位法線ベクトル場をもち、カスプ辺とツバメの尾のみを許容すると以下の 2 つの式が成り立つ。

$$\int_{M^2} K dA + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa_s d\tau = 2\pi \chi(M^2), \quad (3)$$

$$(2 \deg(\nu) =) \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A} = \chi(M_+) - \chi(M_-) + S_+ - S_-. \quad (4)$$

ここで  $d\tau$  は特異曲線の線素を表す。 $\kappa_s d\tau$  は特異曲線上にツバメの尾が現れても特異曲線上の 1 次微分形式としてなめらかに定義される。また  $K dA$  および  $K d\hat{A}$  は  $M^2$  上で連続な微分形式を定める。したがって、これらの公式に現れる積分はすべてリーマン積分として定義される。第 2 の式の  $S_+$  と  $S_-$  は、それぞれ正と負のツバメの尾の数を表すが、ここでツバメの尾の正負の定義は述べない、詳しくは文献 [11] を参照せよ。公式 (1) は Kossowski により示され (2) は Langevin-Levitt-Rosenberg によって示された。但し Kossowski は特異曲率  $\kappa_s$  は定義せず微分形式として  $\kappa_s d\tau$  を扱った。特異曲率は論文 [11] で初めて導入された。

## 2. 波面を特徴づける半正定値計量

本節では、前節の 2 つの波面に関する Gauss・ボンネの定理の内的な定式化を与える。まず、 $M^2$  を 2 次元多様体とし、 $d\sigma^2$  を  $M^2$  上の半正定値な計量とする。 $d\sigma^2$  が正定値でない点を、この計量の特異点とよぶことにする。

いま、 $\mathcal{V}^\infty(M^2)$  を  $M^2$  上のベクトル場の全体とし、写像  $\Gamma : \mathcal{V}^\infty(M^2) \times \mathcal{V}^\infty(M^2) \times \mathcal{V}^\infty(M^2) \rightarrow C^\infty(M^2)$  を

$$\Gamma(X, Y, Z) := \frac{1}{2} \left( X(Y, Z) + Y(X, Z) - Z(X, Y) + ([X, Y], Z) - ([X, Z], Y) - ([Y, Z], X) \right),$$

によって定義し，これを Kossowski 擬接続 とよぶことにする，ただし，丸括弧は， $ds^2$  から決まる内積を表す．これは Kossowski [4] で導入された．

半正定値計量  $d\sigma^2$  の特異点  $p \in M^2$  に対して

$$\mathcal{N}_p := \left\{ v \in T_p M^2; d\sigma^2(v, w) = 0 \text{ for } \forall w \in T_p M^2 \right\},$$

を，特異点  $p$  における退化空間とよぶ．もしも  $X, Y, Z \in \mathcal{V}^\infty(M^2)$  が  $Z_p \in \mathcal{N}_p$  を満たすとき関数  $\Gamma(X, Y, Z)$  が点  $p$  で零になるならば， $p$  は許容的な特異点であるという．もしもすべての  $M^2$  上の点が許容的であるならば，計量  $d\sigma^2$  は許容的 であるという．以下の命題が成り立つ．

**命題 2**  $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を，2次元多様体  $M^2$  から  $\mathbf{R}^3$  への  $C^\infty$ -写像とすると，誘導計量は許容的である．

(証明) これは， $\mathbf{R}^3$  の Levi-Civita 接続を  $D$  とすると，Kossowski 擬接続が

$$\Gamma(X, Y, Z) = D_X df(Y) \cdot df(Z)$$

と書けることからしたがう，ここでドットは  $\mathbf{R}^3$  の内積を意味する． (証明終)

**定義 3** 許容的な半正定値計量  $d\sigma^2$  が波面的であるとは，各  $p \in M^2$  に対して， $p$  のまわりの座標近傍  $(U; u, v)$  と  $C^\infty$ -関数  $\lambda: U \rightarrow \mathbf{R}$  が存在して

$$EG - F^2 = \lambda^2,$$

が成り立つときをいう，但し  $d\sigma^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  と書けているものとする．このとき  $\lambda$  は先に定義した符号付き面積密度関数に一致する．

もしも  $d\sigma$  が波面的で， $M^2$  が向きづけられていた場合には， $(U; u, v)$  を向きに同調した局所座標系とすると

$$dA := |\lambda| du \wedge dv$$

は，このような局所座標の取り方に依存せず， $M^2$  上の連続な2次微分形式を定める．

与えられた波面的な計量が 余向き付け可能 であるとは， $M^2$  の符号付き面積密度関数が付随した可微分構造  $\{(U_\alpha, u_\alpha, v_\alpha, \lambda_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  が存在し

$$d\hat{A} := \lambda_\alpha du_\alpha \wedge dv_\alpha$$

が  $M^2$  上の滑らかな2次微分形式を定めるときをいう．一般に，余向き付け可能性は，多様体  $M^2$  の向き付け可能性とは独立な概念である．以下のことは簡単にチェックできる．

**Fact 4**  $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面とすると，その誘導計量は波面的な計量となる．この計量が余向き付け可能であることと，滑らかな単位法線ベクトル場が  $M^2$  上一価にとれることが同値になる．

Kossowski [5] は，波面的な計量の中でも，さらに性質のよい，以下の計量のクラスを考えた．

**定義 5** 波面的な計量の特異点  $p \in M^2$  が，非退化 (non-degenerate) であるとは， $(U; u, v)$  を点  $p$  の座標近傍で  $\lambda: U \rightarrow \mathbf{R}$  を，その座標近傍に同伴した符号付き面積密度関数としたとき，外微分  $d\lambda$  が点  $p$  で零にならないときをいう．この条件は，座標近傍の取り方に依存しない．すべての特異点が非退化であるような波面的な計量を Kossowski 計量という．

余向き付け可能な波面から誘導される計量については，その計量の正則点におけるガウス曲率  $K$  と，符号付き面積要素の積  $Kd\hat{A}$  は，その曲面のガウス写像による単位球面の面積要素の引き戻しに一致する．すると特に，特異点までこめて滑らかな 2 次微分形式を定めるが，抽象的な Kossowski 計量に対しては，このことは自明ではない．この事実の逆に相当する主張として Kossowski [5] では，以下の命題を与えている．

命題 6 (Kossowski)  $d\sigma^2$  を，多様体  $M^2$  上の余向き付け可能な Kossowski 計量とし， $K$  を正則点におけるガウス曲率とすると  $Kd\hat{A}$  は  $M^2$  上の滑らかな 2 次微分形式に（一意的）に拡張される．

さらに，この事実を基に，Kossowski 氏は， $Kd\hat{A} \neq 0$  となる特異点を一般的な特異点とよび，以下の定理を得た．

定理 7 (Kossowski の実現定理)  $p$  を実解析的な Kossowski 計量  $d\sigma^2$  の一般的な特異点とすると，点  $p$  の近傍  $U$  と，波面

$$f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$$

が存在し， $d\sigma^2$  は  $f$  による  $\mathbf{R}^3$  の標準計量の引き戻しに一致する．

計量の実解析性は，偏微分方程式の初期値問題に関する Cauchy-Kovalevski の定理を用いるために必要となる．この結果から，Kossowski 計量は，ほぼ波面を内的に特徴づける計量である，といってもよいだろう．この Kossowski の実現定理のカスプ辺に関する精密化として，カスプ辺の等長変形という立場で実現の自由度までこめて，精密に調べた結果文献として，筆者等の最近の研究 [10] がある．

### 3. Kossowski 計量に関する Gauss-Bonnet の定理

Kossowski 氏はしかし，ここまで示しておきながら，波面のガウス・ボンネの公式 (4) に関しては，なぜか，この計量を用いることはせず， $\mathbf{R}^3$  の波面のみを扱っている．けれども，ガウス・ボンネの定理は本来，外の空間に関係なく 2 次元リーマン多様体のクラスで，記述できるものであるから，より一般に，Kossowski 計量に対してまで定式化されることが期待される．このことを次に示そう．まず，カスプ辺とツバメの尾の概念を，Kossowski 計量の言葉に翻訳する作業から始める．

定義 8 ([2])  $p \in M^2$  を Kossowski 計量の特異点とすると，特異点の非退化性から， $p$  の座標近傍  $(U; u, v)$  が存在して， $U$  における特異点集合は，点  $p$  を通る  $uv$ -平面上の正則曲線として表される．いま

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \quad (\gamma(0) = p)$$

をその特異点集合の助変数表示とすると，この曲線上の各点  $\gamma(t)$  には，

$$\eta(t) \in \mathcal{N}_{\gamma(t)} \quad (|t| < \varepsilon)$$

となる零でないベクトル  $\eta(t)$  がとれる．このベクトルの方向を，点  $\gamma(t)$  における退化方向という． $\eta(t)$  は  $t$  に関して滑らかにとることができて  $\gamma$  に沿うベクトル場とみなせる，これを退化ベクトル場という．また，特異曲線の接ベクトル  $\dot{\gamma}(t) := d\gamma/dt$  のことを特異方向という．この状況で，

- (1) 2 つのベクトル  $\eta(t)$  と  $\dot{\gamma}(t)$  が  $p = \gamma(0)$  で一次独立であるなら  $p$  は  $A_2$ -特異点あるいは内的カスプ辺とよぶ．

- (2) 2つのベクトル  $\eta(t)$  と  $\dot{\gamma}(t)$  を2次元列ベクトルと思って2次の正方行列  $(\dot{\gamma}(t), \eta(t))$  を考えて、その行列式を

$$\lambda(t) := \det(\dot{\gamma}(t), \eta(t))$$

で表す。  $\lambda(0) = 0$  かつ  $\dot{\lambda}(0) \neq 0$  のとき  $p$  は  $A_3$ -特異点あるいは内的ツバメの尾とよぶ。

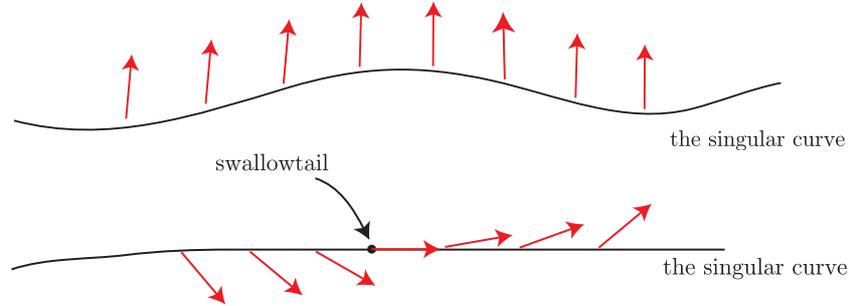


図 3: 内的カスプ辺 (上) と内的ツバメの尾 (下)

この定義は、本当のカスプ辺やツバメの尾の特異点と以下のように関係している。

命題 9  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を波面とし  $p$  を  $f$  の特異点とせよ。  $p$  がカスプ辺 (resp. ツバメの尾) であるための必要充分条件は、  $f$  の誘導計量が点  $p$  を非退化な特異点にもち、かつ  $p$  が内的ツバメの尾 (resp. カスプ辺) となることである。

この命題は、論文 [7] におけるカスプ辺とツバメの尾の判定条件からの帰結である。もしも  $f$  が波面でないときには、内的カスプ辺は本当のカスプ辺に対応しないこともある。たとえばカスプ状交叉帽子の誘導計量は、内的カスプ辺を定める。内的カスプ辺について、以下の主張が成り立つ。

命題 10 ([2])  $\alpha(u, v), \beta(u, v)$  を、原点  $(0, 0)$  の近傍で定義された2つの  $C^\infty$ -関数とする。このとき

$$d\sigma^2 := (1 + v^2\alpha)du^2 + v^2(1 + v\beta)dv^2 \quad (5)$$

は  $u$ -軸を特異曲線とする Kossowski 計量で、原点は、内的カスプ辺となる。逆に、任意の内的カスプ辺は、上記のような表示をもつ。

上の (5) において、点  $p = (0, 0)$  が一般的であるための必要充分条件は

$$\alpha(0, 0)\beta(0, 0) - 3\alpha_v(0, 0) \neq 0$$

で与えられる。また

$$\kappa_s := -\alpha(u, 0) \quad (6)$$

によって、内的カスプ辺の特異曲率を定義する。もしも特異曲線上に内的ツバメの尾が現れると  $\kappa_s d\tau$  は曲線上で滑らかな1次微分形式となる、但し  $\tau$  は、特異曲線の弧長とする。以上の準備の下、我々は最近、以下の定理を得た。

定理 11  $M^2$  をコンパクトで向きづけられた2次元多様体とし、  $d\sigma^2$  を、内的カスプ辺と内的ツバメの尾のみを許容する Kossowski 計量ならば、式 (3) が成り立つ。さらに  $d\sigma^2$  が余向き付け可能であるならば式 (4) が成り立つ。

(証明) 証明の概略を述べる.  $n$  次元多様体  $M^n$  上の階数  $n$  のベクトル束  $\mathcal{E}$  に内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  とそれに同調する共変微分  $D$  が存在し, さらに  $M^n$  の接束から  $\mathcal{E}$  へのベクトル束準同型  $\varphi: M^2 \rightarrow \mathcal{E}$  が存在し,

$$D_X\varphi(Y) - D_Y\varphi(X) = \varphi([X, Y])$$

が  $M^n$  上の任意のベクトル場  $X, Y$  について成り立つとき, 4つ組  $(\mathcal{E}, \varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle, D)$  を  $M^n$  上の接続接束 (coherent tangent bundle) という. この設定で

$$ds_\varphi^2 := \varphi^* \langle \cdot, \cdot \rangle$$

を  $\varphi$  から誘導される計量という.  $ds_\varphi^2$  は常に波面的な計量となり, この計量が余向き付け可能であることと  $\mathcal{E}$  が向き付け可能であることは同値である.  $d\sigma^2$  を Kossowski 計量とすると, 接続接束

$$\varphi: M^2 \rightarrow \mathcal{E}$$

が存在して,  $\mathcal{E}$  の内積の  $\varphi$  による引き戻しは  $d\sigma^2$  になるようにできる. すると, 接続接束上では, (3) と (4) の2つのタイプのガウス・ボンネ型の公式はすでに [12] で構築済みであるので, その結果を適用することで, 定理が示される. (4) の左辺は  $\mathcal{E}$  のベクトル束のオイラー特性数に一致する. (証明終)

ここで述べた以外の接続接束のさまざまな応用については [13] を参照せよ. 研究集会のあと, 筆者と山田氏および佐治氏との研究 [14] で  $n$  次元多様体上の Kossowski 計量の定義と, 計量が接続接束を導くこと, および  $n$  が偶数次元の場合の公式 (4) の高次元化を得ている.

#### 4. 交叉帽子を特徴づける半正定値計量

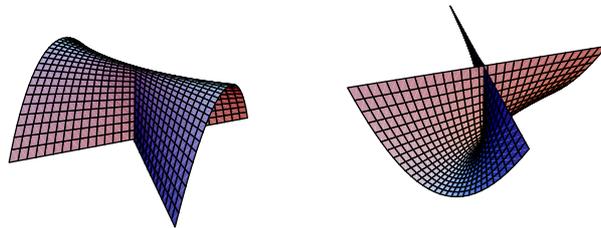


図 4: 標準的交叉帽子  $f_0(u, v) = (u, uv, v^2)$

$C^\infty$ -写像  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  の特異点が交叉帽子であるための判定条件は Whitney によって与えられている. 点  $p$  のまわりの局所座標系  $(u, v)$  を  $f_v(p) = 0$  であるようにとったとき

$$\det(f_u(p), f_{uv}(p), f_{vv}(p)) \neq 0$$

となることが  $p$  が交叉帽子であるための必要充分条件である. 2次元多様体から  $\mathbb{R}^3$  への  $C^\infty$ -写像を考えたとき, もっとも頻りに現れる特異点は交叉帽子であることが知られている. 交叉帽子は孤立特異点であり, 単位法線ベクトルは近づく方向によって異なるため, 波面にはならない. また, ガウス曲率も平均曲率も共に発散するため (cf. [1], [3]), ガウス曲率や平均曲率一定曲面の研究には登場しないが, 曲面に現れるもっとも重要な特異点である. 1975 年 Kuiper は以下の結果を示した.

**Fact 12** ([8])  $M^2$  を向き付け可能なコンパクト 2次元多様体とし,  $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $C^\infty$ -写像で, 交叉帽子のみを許容したとすると

$$\int_{M^2} K dA = 2\pi\chi(M^2).$$

を満たす.

この結果を内的に定式化するため, 半正定値計量の特異点としての内的交叉帽子を定義する.  $M^2$  を 2次元多様体とし,  $d\sigma^2$  を許容的な計量とする.  $d\sigma^2$  の特異点  $p \in M^2$  に対して, 座標近傍  $(U; u, v)$  をとり, 計量を

$$d\sigma^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

で表す. もしも

$$\Delta := \det \begin{pmatrix} \delta_{uu} & \delta_{uv} \\ \delta_{uv} & \delta_{vv} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\delta := EG - F^2)$$

が点  $p$  で成り立つならば  $p$  を, 与えられた計量の内的交叉帽子という.

**Fact 13** 内的交叉帽子は孤立特異点で,  $\dim(\mathcal{N}_p) = 1$  を満たす.

初めて交叉帽子特異点を研究した Whitney に経緯内的交叉帽子のみを許容する半正定値計量を Whitney 計量という. Whitney 計量は孤立特異点のみを許容するため Kossowski 計量にはなり得ない. 我々が内的交叉帽子と名付けたのは以下の命題による.

**命題 14** ([2])  $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $C^\infty$ -写像が, 交叉帽子のみを許容したとすると, 誘導計量は Whitney 計量となる.

(証明)  $p$  を  $f$  の特異点としいま  $f_v(p) = 0$  なる局所座標  $(u, v)$  をとると

$$\det(f_u, f_{uv}, f_{vv})^2 = \det \left( \begin{pmatrix} f_u \\ f_{uv} \\ f_{vv} \end{pmatrix} (f_u, f_{uv}, f_{vv}) \right) = \begin{pmatrix} E & F_u & F_v \\ F_u & G_{uu}/2 & G_{uv}/2 \\ F_v & G_{uv}/2 & G_{vv}/2 \end{pmatrix} = \frac{\Delta}{4E}.$$

となるので Whitney の判定条件から結論が得られる.

(証明終)

さらに我々は, 以下の定理を得た.

**定理 15**  $M^2$  をコンパクトで向き付け可能な 2次元多様体とし,  $d\sigma^2$  を  $M^2$  上の Whitney 計量とすると

$$\int_{M^2} K dA = 2\pi\chi(M^2),$$

なる式が成り立つ. ここで  $K$  は計量の正則点におけるガウス曲率で  $dA$  は面積要素である.

実際, 特異点を原点とする切な座標  $(u, v)$  をとり

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta,$$

とおくと

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 K = \frac{\alpha_{02}(\alpha_{20} \cos^2 \theta - \alpha_{02} \sin^2 \theta)}{(\cos^2 \theta + (\alpha_{11} \cos \theta + \alpha_{02} \sin \theta)^2)^2}.$$

と書ける．ここで  $\alpha_{02} (> 0)$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{20}$  は定数で，与えられた交叉帽子の内的な不変量と解釈することができるが，この式から  $KdA$  が  $(r, \theta)$  に関して滑らかであることがわかり，上の積分がリーマン積分として定まることがわかるだけでなく，この式を用いて，上の Gauss-Bonnet 型の公式が示される．

Kossowski 計量については，その計量の実現定理を紹介したが，Whitney 計量についても同様の実現定理が期待されるが，現段階では，証明に至っていない．

## 参考文献

- [1] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella —a differential geometric approach via blowing up—*, Journal of Singularities, **4** (2012), 35-67.
- [2] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, to appear in International Journal of Mathematics (special issue: the Kobayashi memorial volume).
- [3] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara, and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, Selecta Mathematica, **20** (2014), 769-785.
- [4] M. Kossowski, *Pseudo Riemannian metric singularities and the extendability of parallel transport*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 147-154.
- [5] M. Kossowski, *Realizing a singular first fundamental form as a nonimmersed surface in Euclidean 3-space*, J. Geom. **81** (2004), 101-113.
- [6] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for  $C^\infty$ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 19-29.
- [7] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math., **221** (2005), 303-351.
- [8] N.H. Kuiper, *Stable surfaces in Euclidean three space*, Math. Scand **36**, (1975), 83-96.
- [9] R. Langevin, G. Levitt, and H. Rosenberg, *Classes d'homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d'aronde dans  $R^3$* , Canad. J. Math. **47** (1995), 544-572.
- [10] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, to appear in Tohoku Math. J., arXiv:1408.4243.
- [11] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math., **169** (2009), 491-529.
- [12] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, Kyusyu Journal of Mathematics **62** (2008), 259-280.
- [13] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, Journal of Geometric Analysis **22** (2012), 383-409.
- [14] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *An index formula for a bundle homomorphism of the tangent bundle into a vector bundle of the same rank, and its applications*, Preprint.