$\mathbb{C}H^n$ 内の可解群作用により得られる等質ラグランジュ部分多様体

梶ヶ谷徹　(阪市大数学研)*1
橋永貴弘　(北九州高専)*2

1. 序

(M, ω, J) を複素 n 次元の Kähler 多様体とする．ここで, ω は Kähler 形式, J は複素構造である．部分多様体 L が**ラグランジュ部分多様体**であるとは, $\omega|_L = 0$ かつ $\dim L = n$ となる場合を言う． L が $\mathrm{Aut}(M, \omega, J)$ の連結リー部分群 G の軌道として得られるとき, **等質**と呼ぶ．特定の Kähler 多様体内の等質ラグランジュ部分多様体の分類問題は, 基本的かつ重要な問題の一つである．例えば, $M = \mathbb{C}P^n$ かつ G が単純リー群のとき (Bedulli-Gori [1]) と, $M = Q_n(\mathbb{C}) \simeq \tilde{G}r_2(\mathbb{R}^{n+1})$ のとき (Ma-大仁田 [3]) には分類が与えられており, ラグランジュ部分多様体の多くの具体例が得られる．しかしながら, 階数の高いエルミート対称空間や非コンパクト型の場合には, 具体例やその性質, 分類について多くの部分が未解明であり, これが本研究の1つの動機である．本稿では, M が複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ のときに, $\mathrm{Aut}(M, \omega, J)$ のある部分群のクラスに対して非コンパクト等質ラグランジュ部分多様体の分類を与えた結果を紹介する．

2. 可解群の部分群作用により得られる等質ラグランジュ部分多様体

$M = \mathbb{C}H^n \simeq G/K = SU(1,n)/S(U(1) \times U(n))$ とする． G, K のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ と書き, Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ と書く． $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間 (今は次元が 1) とし, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ とかく．今, $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ とおく．このとき, 岩澤分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ を得る．ここで, $\mathfrak{n}$ は冪零部分代数であり, $\mathfrak{s}$ は可解部分代数になることに注意する． $\mathfrak{s}$ に対応する連結リー群を S とすると, S は単連結であり, M に単純推移的に作用する．従って, 同一視 $S \simeq M$ が存在し, この同一視によって, S 上に Kähler 構造を誘導する． $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}^2$, $\mathfrak{g}^1$ は, $\mathfrak{s}$ の複素構造 J に関して不変であり, 特に $J\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^2$ である．そこで, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}^2$ の ($\mathfrak{s}$ 上の内積に関する) 長さ 1 の基底 A, Z を $JA = Z$ となるようにとっておく．

S の連結リー部分群 S' で, ラグランジュ軌道を持つものを考える． S' の任意の軌道は, S' の S の中での適当な共役類 S'' をとれば, S'' の原点軌道に等長的であるから, 初めから, S' の原点軌道がラグランジュ軌道であるとしてよい．このとき, $T_o(S' \cdot o) \simeq \mathfrak{s}'$, $T_oM \simeq T_o(S \cdot o) \simeq \mathfrak{s}$ の同一視のもと, $\mathfrak{s}'$ は $\mathfrak{s}$ のラグランジュ部分空間となるような部分代数である．このような部分代数を単に**ラグランジュ部分代数**と呼ぶことにする．従って, この場合, ラグランジュ軌道の分類は, $\mathfrak{s}$ のラグランジュ部分代数の分類に帰着する．

可解代数 $\mathfrak{s}$ の構造を使うと, このラグランジュ部分代数について, 次のことが示せる:

補題 1. $\mathfrak{l}$ を $\mathfrak{s}$ のラグランジュ部分代数とする．このとき, $\mathfrak{l}$ は二つのラグランジュ部分空間 $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{g}^1$ と $\mathfrak{l}_2 \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}^2$ の直和になる．

本研究は, JSPS 頭脳循環を加速する戦略的国際研究ネットワーク推進プログラム, 「対称性, トポロジーとモジュライの数理，数学研究所の国際研究ネットワーク展開」の助成を受けたものです．
*1 e-mail: kajigaya@sci.osaka-cu.ac.jp
*2 e-mail: hashinaga@kct.ac.jp

さらに, 簡単な考察から, ラグランジュ部分空間 $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{g}^1$ を標準化することができることがわかる. つまり, ラグランジュ部分代数 $\mathfrak{l}$ は, ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して, **標準的なラグランジュ部分代数**

$$\mathfrak{l}_\theta := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} \oplus \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\cos\theta A + \sin\theta Z\}.$$

に同型になる. ここで, $\mathfrak{g}^2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_1 \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}$ s.t. $JX_i = Y_i, [X_i, Y_i] = Z (i = 1, \ldots, n-1)$ としている. また, 再び簡単な考察により, $\mathfrak{l}_\theta$ の (リー代数としての) 同型類は, θ によって, $[0, \pi/2]$ の範囲でパラメトライズされることがわかる.

$\theta \in [0, \pi/2]$ に対し, $L_\theta := \exp_{\mathfrak{s}} \mathfrak{l}_\theta$ とおくと, L_θ の原点軌道は L_θ と微分同相なラグランジュ軌道である. 曲率を計算することにより, θ が異なれば互いに等長的ではないことがわかる. また, L_θ は $\theta = \pi/2$ のときに限り可換群になる. 次の定理は, S の部分群作用により得られるラグランジュ軌道の合同類は $\theta \in [0, \pi/2]$ でパラメトライズされるということを言っている:

定理 2 ([2])**.** 可解リー群 S の連結リー部分群 S' の $\mathbb{C}H^n$ への作用が, ラグランジュ軌道 $\mathcal{O}$ を持つとする. このとき, $\mathcal{O}$ は, ある $\theta \in [0, \pi/2]$ に対し, L_θ の原点軌道と等長的になる.

S の部分群作用で得られるラグランジュ軌道のうち, 極小となるのは, それが全測地的な $\mathbb{R}H^n$ になるとき ($\theta = 0$ のとき) だけであるが, すべての軌道が (非コンパクト軌道であるが), ハミルトン極小と呼ばれる制限付き変形のもとでの極小部分多様体になっている.

3. さらなる結果

論文 [2] では, $\mathbb{C}H^n$ の幾何学と Kähler 商を組み合わせて, $\mathbb{C}H^n$ 内に複数の等質ラグランジュ部分多様体の構成法を与えている. この方法では, コンパクトおよび非コンパクト等質ラグランジュ部分多様体の多くの具体例を与えることができる. 定理2で与えた例は, (可換群になる場合を除き) その方法では得ることができない例という意味合いもある. また, 階数の高い場合についても研究が進展中である.

参考文献

[1] L. Bedulli and A. Gori, *Homogeneous Lagrangian submanifolds,* Commun. Anal. Geom. 16 (3) (2008) 591–615.

[2] T. Hashinaga and T. Kajigaya, *On homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces*, in preparation.

[3] H. Ma and Y. Ohnita, *On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres*, Math. Z. (2009) 261: 749-785.