

Jorge-Meeks 型極大曲面とその解析的拡張について

國分 雅敏 (東京電機大学・工学部)

藤森祥一氏 (岡山大), 川上裕氏 (金沢大), Wayne ROSSMAN 氏 (神戸大), 梅原雅顕氏 (東工大), 山田光太郎氏 (東工大) との共著論文 [3] において次を証明した.

主定理. Lorentz-Minkowski 空間 \mathbb{R}_1^3 の Jorge-Meeks 型極大曲面は, 固有に埋め込まれた (properly embedded) 平均曲率 0 曲面に解析的に拡張される.

1 折り目型特異点をもつ極大曲面

\mathbb{R}_1^3 にて, 符号数 $(++-)$ の 3次元 Lorentz-Minkowski 空間を表す. よく知られるように, \mathbb{R}_1^3 に埋め込まれた平均曲率 0 をもつ空間的曲面は極大曲面とよばれ, \mathbb{R}^3 の極小曲面と同様, Weierstrass 型の表現公式をもつ (例えば [10] など参照されたい):

M を Riemann 面とする.

極小はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$	極大はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$
$f = \operatorname{Re} F,$ $F: M \rightarrow \mathbb{C}^3$ is hol. null	$f = \operatorname{Re} F,$ $F: M \rightarrow \mathbb{C}^3$ is hol. Lor. null
Weierstrass の公式 $f = \operatorname{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega$ $g: M \rightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \omega \in A^1(M)$	Weierstrass 型公式 $f = \operatorname{Re} \int (1 + g^2, i(1 - g^2), -2g)\omega$ $g: M \rightarrow D = \{ z < 1\}, \omega \in A^1(M)$

g は正則写像, ω は正則 1 形式.

大域的な結果として次が知られている.

事実 1. (1) xy 平面全体の上の極大グラフは平面に限る. (Calabi, 1970 [1])

(2) 完備な極大曲面は平面に限る. (Cheng-Yau, 1976 [2])

(1) は (\mathbb{R}^3 の極小曲面と同様に) ‘Bernstein の定理’ が成り立つことを主張する. ただし, 曲面が必ずしも空間的でない場合 (時間的, または混合型の場合) 非自明な例がある.

(2) は, 必ずしも正則曲面 (regular surface) とは限らない曲面の研究へと誘う.

以下, 極大曲面にある種の特異点を許容した範疇で扱うこととする. この必ずしも正則曲面とは限らない曲面は 極大面 (maxface) とよばれ, (Gauss 写像 g が S^2 への写像となるが) Weierstrass 型公式はそのまま成り立つ.

事実 2. Weierstrass データ (g, ω) の極大面に対し, $p \in M$ が特異点 $\iff |g(p)| = 1$.

更に, 特異点 p は $dg(p) \neq 0$ のとき, 非退化特異点とよばれる. 非退化特異点 p では, その点の付近で, 特異点集合 $\Sigma := \{p; |g(p)| = 1\}$ は正則曲線となる.

事実 3 ([5]). 非退化特異点 p が折り目型特異点 (fold singularity) かどうかは (g, ω) で判定できる:

$$\alpha := dg/g^2\omega$$

と定めたとき, p が折り目型特異点 $\iff \operatorname{Re}(\alpha) \equiv 0$ on γ .

注 1 ([11], [6]). 別の種類の特異点 (カスプ辺 (cuspidal edge), ツバメの尾 (swallowtail), カスプ状交叉帽子 (cuspidal cross cap)) についても, (g, ω) による判定定理がある.

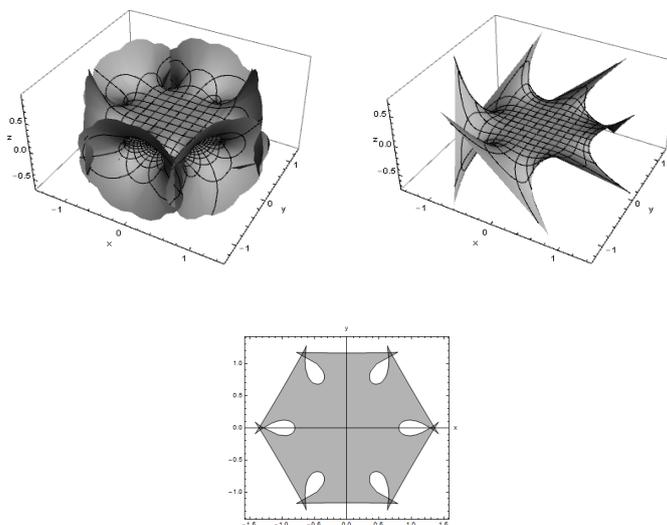
2 Jorge-Meeks 極小曲面と Jorge-Meeks 型極大面

定義 1. \mathbb{R}^3 の極大面 $f = \operatorname{Re}(F_1, F_2, F_3)$ に対し, $\operatorname{Re}(F_1, F_2, iF_3)$ を f の仲間 (companion) という. これは \mathbb{R}^3 の極小曲面である.

Jorge-Meeks 極小曲面 (Jorge-Meeks n ノイド) [7] を companion にもつ極大面を **Jorge-Meeks 型極大面** (Jorge-Meeks 型 n ノイド) とよぼう. Jorge-Meeks 型 n ノイドの Weierstrass データは

$$(g, \omega) = \left(z^{n-1}, \frac{i}{(z^n - 1)^2} dz \right) \text{ on } \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{z; z^n = 1\}$$

で与えられ, 特異点集合 $\{z; |z| = 1\} \setminus \{z; z^n = 1\}$ は折り目特異点からなることが確かめられる. つまり, Jorge-Meeks 型 n ノイドの像は, $\bar{D} \setminus \{z; z^n = 1\}$ の像と $(S^2 \setminus D) \setminus \{z; z^n = 1\}$ の像がべったりと重なっている.



(JM 6 ノイドと JM 型 6 ノイド. xy 平面への射影は共通である.)

3 Jorge-Meeks 型極大曲面の解析的拡張とその埋め込み性

折り目型特異点集合の像は 実の null curve (接ベクトルが null vector の曲線) となっている.

事実 4 ([9], [8] など). $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ を実の null curve とする. Γ 上の任意 2 点の中点を集めた集合 $\left\{ \frac{p+q}{2} \mid p, q \in \Gamma \right\}$ は, 時間的極小曲面 (timelike minimal surface) を形成する.

Jorge-Meeks 型 n ノイドの折り目型特異点集合の像に事実 4 を適用したとき、それが正則曲面として実解析的拡張となっており、その結果出来上がるものが混合型の平均曲率 0 曲面となることが期待される。

実際、Jorge-Meeks 型 n ノイドを極座標 $z = re^{i\theta}$ を用いて $f_n = f_n(z) = f_n(r, \theta)$ のように記述すると、 $f_n = \tilde{f}_n\left(r + \frac{1}{r}, \theta\right)$ の形に記述されることに気づく。そこで、新たな変数 $u = r + \frac{1}{r}$ を導入すると、 $\tilde{f}_n = (x, y, z)$ は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{T_{n-1}(u) \sin \theta + u \sin(n-1)\theta}{n(T_n(u) - \cos n\theta)} + \frac{n-1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \log\left(u - \cos\left(\theta - \frac{2\pi j}{n}\right)\right) \sin \frac{2\pi j}{n}, \\ y &= \frac{-T_{n-1}(u) \cos \theta + u \cos(n-1)\theta}{n(T_n(u) - \cos n\theta)} + \frac{n-1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \log\left(u - \cos\left(\theta - \frac{2\pi j}{n}\right)\right) \cos \frac{2\pi j}{n}, \\ z &= \frac{\sin n\theta}{n(T_n(u) - \cos n\theta)} \end{aligned}$$

と表される。ここに、 $T_n(u)$, $T_{n-1}(u)$ はそれぞれ n 次、 $n-1$ 次の第 1 種 Chebyshev 多項式である。このことより、 $\tilde{f}_n(u, \theta)$ は、その定義域を $u \geq 1$ を超えた次の多様体 Ω_n に拡張可能することができる。

$$\Omega_n := \left\{ (u, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mid u > \max_{j=0, \dots, n-1} \left[\cos\left(\theta - \frac{2\pi j}{n}\right) \right] \right\} \cup \{p_\infty\}, \quad (3.1)$$

ここに、 p_∞ は $u = \infty$ に対応する点（無限遠点）。

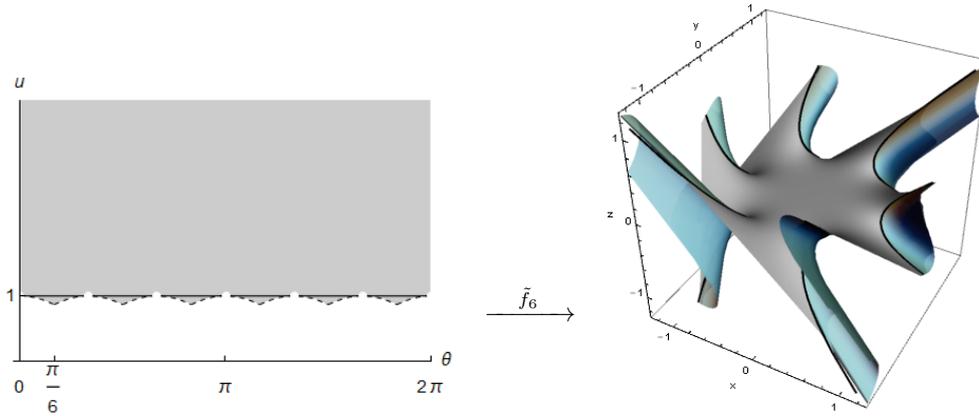


図 1: Ω_n および Jorge-Meeks 型 n ノイドの解析的拡張 ($n = 6$ の場合)

Ω_n は、 \tilde{f}_n を実解析的に拡張できる最大の範囲であることに注意されたい。

\tilde{f}_n は次の対称性をもつ：

$$\tilde{f}_n(u, \theta + 2\pi/n) = R\tilde{f}_n(u, \theta), \quad \tilde{f}_n(u, -\theta) = S\tilde{f}_n(u, \theta), \quad (3.2)$$

ここに

$$R = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) & 0 \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

主定理の証明の流れ：

対称性 (3.2) に着目する. $\Omega_n^0 := \{(u, \theta) \mid u > 0, 0 \leq \theta \leq \pi/n\}$ と定めれば, $\tilde{f}_n(\Omega_n)$ は対称性 (3.2) に従い $\tilde{f}_n(\Omega_n^0)$ のコピーをつなぎ合わせたものと考えられる.

Step 1: \tilde{f}_n が固有写像であること及びはめ込みであることは, Ω_n^0 上で確認すれば十分である. 実際, Chebyshev 多項式の性質を駆使して, 直接計算でそれを確かめることができる.

Step 2-1: 埋め込み性については, まず Ω_n^0 上の任意の高さ $z = h$ の等高線 γ_h が自己交叉のない正則曲線であることを示す.

Step 2-2: 曲面全体に対しての等高線は $\cup R^k \gamma_h$ で与えられることに着目し, $\cup R^k \gamma_h$ が各 $R^k \gamma_h$ の非交和であることを示す.

4 後続研究

本稿で紹介した Jorge-Meeks 型 n ノイドの解析的拡張に限らず, \mathbb{R}_1^3 に固有に埋め込まれた混合型の平均曲率零曲面が存在する. そのようなものの中でもとくに xy 平面全体の上のグラフであるものの研究について [4] で取り組んでいる. Jorge-Meeks 型 2 ノイド (これは xy 平面全体の上のグラフとしても得られる) の一般化である.

注 2. Jorge-Meeks 型 2 ノイドは, 元々 [10] で helicoid of 2nd kind と呼ばれていた曲面で, hyperbolic catenoid なる名称ももつ. それが, 平均曲率 0 グラフの方程式に関する xy 平面全体を定義域とする大域解を与えていることも [10] で既に指摘されていた.

参考文献

- [1] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math., **15** (1970), 223–230.
- [2] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. (2), **104** (1976), no. 3, 407–419.
- [3] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, preprint (arXiv:1509.05853).
- [4] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Zero mean curvature entire graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, preprint (arXiv:1511.07954).
- [5] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ., **57** (2015), 173–200.
- [6] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z., **259** (2008), 827–848.
- [7] L. P. Jorge and W. H. Meeks, III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology, **22** (1983), 203–221.
- [8] Y. W. Kim, S.-E. Koh, H. Shin and S.-D. Yang, *Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae*, J. Korean Math. Soc., **48** (2011), 1083–1100.
- [9] V. A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izvestiya Math., **67** (2003), 209–224.
- [10] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space \mathbb{L}^3* , Tokyo J. Math., **6** (1983), 297–309.
- [11] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 13–40.