# $SU(4)$ の不変交代形式

間下克哉

平成 28 年 2 月 16 日

リーマン多様体 $M$ の微分形式 $\omega$ に対して

$$|\ \omega\ |^{*} = \max_{x\in M} \max_{\xi\in\wedge^p T_x(M)}\ \omega(\xi)$$

を **comass** という．$\omega$ が $M$ の **calibration** であるとは，$\omega$ が $M$ の閉微分形式で **comass** が 1 に等しいことをいう．$M = G/K$ をコンパクトリーマン対称空間とするとき $M$ の calibration $\omega$ は $G$ 不変微分形式である．$\omega$ を $M$ の $G$ 不変微分形式とすると，$\omega$ を原点 $eK$ に制限した交代形式 $\omega|_{eK}$ は $\mathrm{Ad}(K)$ 不変交代形式であり逆も成り立つ．

calibration は閉微分形式だからコホモロジー類を定めるが，コホモロジー類を代表する calibration が知られていて，キャリブレートされた部分多様体 (calibrated submanifolds) の研究が進んでいるものが多いとは言えない．

そこで，コンパクト既約対称空間のイソトロピー表現 $G \to O(T_oM)$ の外積表現の不変元に興味を持つ．

一般に，コンパクト単純リー群 $G$ のコホモロジー環 $H^*(G)$ は，$G$ の階数を $r$ とするとき，$r$ 個の生成元により生成された外積代数の構造を持つことが知られている．生成元 $\omega_1$，$\cdots$，$\omega_r$ のうちで次数が最低のものは，$G$ のリー環 $\mathfrak{g}$ の 3 次交代形式

$$\omega_1(X,Y,Z) = \langle X, [Y,Z]\rangle \qquad X,Y,Z \in \mathfrak{g}$$

を拡張した $G$ 不変 3 次微分形式である．$\omega_1$ はキャリブレーションであることが知られている．リー群の階数が 2 の時，$\omega_2$ は $\omega_1$ のポアンカレ双対として得られる．従って，扱うべきリー群は階数が 3 以上のものである．$A_n$ 型のコンパクト単純リー群 $SU(n+1)$ では生成元の次数は 3，5，$\cdots$，$2n+1$ である．

本稿では，$SU(4)$ のリー環の上の $\mathrm{Ad}(SU(4))$ 不変 5 次交代形式について考える．

## 1　一般的な設定

$G$ を階数 $r$ の連結なコンパクト単純リー群とし，$\mathfrak{g}$ を $G$ のリー環とする．$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変内積を $\langle,\rangle$ で表す．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間とし，$\mathfrak{a}$ が生成する連結リー部分群を $A$ とする．

$\rho : G \to SO(V)$ を $G$ の実既約表現とする．また，

- 外積代数への表現 $G \to \bigwedge^p(V)$
- $\rho$ の微分表現 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(V)$
- 上記の複素化

等も全て $\rho$ で表す．$V$ の $\rho(G)$ 不変内積 $\langle , \rangle$ をひとつ取って固定しておく，すべての $\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \left\{ v \in V \mid \rho(\exp(t\,H))(v) = e^{t\langle\lambda,H\rangle}(v) \quad \text{for all } H \in \mathfrak{g} \right\} \\ &= \{ v \in V \mid \rho(H)(v) = \langle\lambda, H\rangle(v) \quad \text{for all } H \in \mathfrak{g} \} \end{aligned}$$

である．$V_\lambda \neq \{0\}$ となる $\lambda$ を表現 $\rho$ の weight という．

$W$ で，$\rho : G \to SU(V^{\mathbb{C}})$ のウェイトの全体を表す．$W = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ とし，ウェイト $\lambda_i$ に対するウェイトベクトル $v_i$ $(1 \leq i \leq N)$ を，$v_1$, $\cdots$, $v_N$ が $V^{\mathbb{C}}$ の基底になるようにとる．

$I = (i_1, \cdots, i_p)$ $(1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_p \leq N)$ に対して $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}$ を $v_I$ または $v_{i_1,\cdots,i_p}$ と書く．$H \in \mathfrak{a}$ の

$$v_I = v_{i_1,\cdots,i_p} = v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}$$

への作用は

$$\rho(H)(v_I) = (\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_p})(H) v_I$$

となるから

$$\Xi = \{ I = (i_1, \cdots, i_p) \ : \ \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_p} = 0,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq N \}$$

とおけば，$\bigwedge^p V^{\mathbb{C}}$ の $\rho(G)$ 不変元は $\{v_I : I \in \Xi\}$ の一次結合で表せる．

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{a}$ に関する 0 でないルートの全体を $R$ で表す．$R$ の基本ルート系を $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ とし $\alpha_0$ を最高ルートとする．$Y_0$ を $\alpha_0$ に対するルートベクトル，$Y_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ を $\alpha_i$ に対するルートベクトルとする．$\bigwedge^p V^{\mathbb{C}}$ の $G$ 不変元 $\xi$ を $\{v_I \mid I \in \Xi\}$ の一次結合

$$\xi = \sum_{I \in \Xi} a_I\, v_i$$

で表す．このとき

$$\rho(Y_i)(\xi) = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, r) \tag{1}$$

が成り立つ．逆に (1) が成り立つとき，$\xi$ が $\rho(\mathfrak{g})$ 不変元となり $\rho(G)$ 不変元となることもわかる．(1) は，$a_I$ を未知数とする連立１次方程式になるから，複素係数の範囲では我々の問題は連立１次方程式に完全に帰着される．(1) を満たす $\xi$ は，表現空間 $V$ の複素化 $V^{\mathbb{C}}$ の基底を用いて表されているため，$\xi$ を $V$ の基底で書き直すことが必要である．

間下 [1] は，コンパクト既約リーマン対称空間 $SU(4)/SO(4)$ のイソトロピー作用の 4 次の外積表現の不変元を (1) を解くことによって求めた．この場合，未知数の個数は 10 であったが，一般には未知数の個数がかなり多くなってしまう．

次の手順で問題を考える．

(1) $\mathcal{Z} = \mathrm{span}\,\{v_I \mid I \in \Xi\}$ に置換として働く適当な有限群 $G_0$ を見つける．

(2) $G_0$ の作用で $\mathcal{Z} = \mathrm{span}\,\{v_I \mid I \in \Xi\}$ を既約分解する．

(3) （(2) で求めた）$\mathcal{Z}$ の各既約成分（$\mathcal{Z}_i$ とする）の $G_0$ 不変元 $\xi_i$ を求める．

(4) (1) に対応する連立 1 次方程式を解く．

(5) 得られた解を $V$ の基底で書きなおす．

次節で，$\rho : SU(4) \to O(\mathfrak{su}(4))$ の 5 次外積表現についてこれを実行する．

# 2 $\wedge^5(\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C}))$ の不変元

## 2.1 $\mathfrak{su}(4)$ の基底

対角成分が $h_1$，$\cdots$，$h_4$ である，4 次対角行列を $\mathrm{Diag}(h_1, \cdots, h_4)$ で表す．
$SU(4)$ の極大トーラス

$$A = \{\mathrm{Diag}(e^{\sqrt{-1}\,h_1}, \cdots, e^{\sqrt{-1}\,h_4}) : h_1,\ \cdots,\ h_4 \in \mathbb{R}, h_1 + \cdots + h_4 = 0\}$$

のリー環

$$\mathfrak{a} = \{\sqrt{-1}\,\mathrm{Diag}(h_1, \cdots, h_4) : h_1,\ \cdots,\ h_4 \in \mathbb{R}, h_1 + \cdots + h_4 = 0\}$$

の複素化を $\mathfrak{h}$ で表す．$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(4)^{\mathbb{C}}$ のカルタン部分環で，その実部は

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Diag}(h_1, h_2, h_3, h_4) : h_1, \cdots, h_4 \in \mathbb{R},\ h_1 + \cdots + h_4 = 0\}$$

である．

$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ は扱いにくいので，まず $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$ で考える．
$\overline{\mathfrak{h}} = \{\mathrm{Diag}(h_1, h_2, h_3, h_4) : h_1, \cdots, h_4 \in \mathbb{C}\}$ とし，$\overline{\mathfrak{h}}$ の基底

$$H_1 = \mathrm{Diag}(1,0,0,0), \cdots, H_4 = \mathrm{Diag}(0,0,0,1)$$

をとる．$\varepsilon_i \in \overline{\mathfrak{h}}^*$ を

$$\varepsilon_i(H_j) = \delta_{ij}$$

で定める．$\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$ の，$\mathfrak{h}$ に関するウェイトの全体を

$$W = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq 4\}$$

である [1]．実際, $(i,j)$ 成分が 1 で他の成分は 0 である 4 次正方行列を $E_{ij}$ で表すとき

$$[\,\mathrm{Diag}(h_1, \cdots, h_4), E_{ij}\,] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)\, E_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 4,\ i \neq j)$$

が成り立つ． また 0 でないウェイト（すなわち，ルート）の集合を $R$ で表す.

$\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$ の基底 $\{E_{ij}\}$ に次のように番号付けする.

$$\begin{array}{llll}
E_{11} = H_1 = v_{13}, & E_{12} = X_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = v_3\ , & E_{13} = X_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} = v_2\ , & E_{14} = X_{\varepsilon_1-\varepsilon_4} = v_1\ , \\
E_{21} = X_{\varepsilon_2-\varepsilon_1} = v_{10}, & E_{22} = H_2 = v_{14}, & E_{23} = X_{\varepsilon_2-\varepsilon_3} = v_5\ , & E_{24} = X_{\varepsilon_2-\varepsilon_4} = v_4\ , \\
E_{31} = X_{\varepsilon_3-\varepsilon_1} = v_{11}, & E_{32} = X_{\varepsilon_3-\varepsilon_2} = v_8\ , & E_{33} = H_3 = v_{15}, & E_{34} = X_{\varepsilon_3-\varepsilon_4} = v_6\ , \\
E_{41} = X_{\varepsilon_4-\varepsilon_1} = v_{12}, & E_{42} = X_{\varepsilon_4-\varepsilon_2} = v_9\ , & E_{43} = X_{\varepsilon_4-\varepsilon_3} = v_7\ , & E_{44} = H_4 = v_{16}.
\end{array}$$

$\{v_1, \cdots, v_{16}\}$ は，$\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$ の $\overline{h}$ に関するウェイト $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ に対するウェイトベクトルである．$\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$ の，$\mathfrak{h}$ に関するウェイト $W = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots, \alpha_{16}\}$ の番号は，対応するウェイトベクトルの番号と同じものとする．例えば $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_4$，$\alpha_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_1 = 0$ である．$\mathfrak{su}(4)$ の 0 でないルートの全体が $R$ だから

$$R = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{12}\}.$$

### 2.2 $A$ の正規化群の部分群 $G_0$

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおく．$g_1$，$g_2$，$g_3$ は $SU(4)$ の極大トーラス $T$ の正規化群の元で $\mathrm{Ad}(g_1)|_{\mathfrak{a}}$，$\mathrm{Ad}(g_2)|_{\mathfrak{a}}$，$\mathrm{Ad}(g_3)|_{\mathfrak{a}}$ は，$SU(4)$ のワイル群 $(\subset O(\mathfrak{a}))$ を生成する.

$\mathrm{Ad}(g_i)$ の，$\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C})$ の基底 $\{v_1, \cdots, v_{16}\}$ への作用は以下の表の通りである.

[1] 一般には重複度を考慮する必要がある.

| | $\mathrm{Ad}(g_1)$ | $\mathrm{Ad}(g_2)$ | $\mathrm{Ad}(g_3)$ | | $\mathrm{Ad}(g_1)$ | $\mathrm{Ad}(g_2)$ | $\mathrm{Ad}(g_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | $v_4$ | $v_1$ | $-v_2$ | $v_9$ | $-v_{12}$ | $v_7$ | $-v_8$ |
| $v_2$ | $v_5$ | $-v_3$ | $v_1$ | $v_{10}$ | $-v_3$ | $v_{11}$ | $v_{10}$ |
| $v_3$ | $-v_{10}$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_{11}$ | $v_8$ | $-v_{10}$ | $v_{12}$ |
| $v_4$ | $-v_1$ | $v_6$ | $-v_5$ | $v_{12}$ | $v_9$ | $v_{12}$ | $-v_{11}$ |
| $v_5$ | $-v_2$ | $-v_8$ | $v_4$ | $v_{13}$ | $v_{14}$ | $v_{13}$ | $v_{13}$ |
| $v_6$ | $v_6$ | $-v_4$ | $-v_7$ | $v_{14}$ | $v_{13}$ | $v_{15}$ | $v_{14}$ |
| $v_7$ | $v_7$ | $-v_9$ | $-v_6$ | $v_{15}$ | $v_{15}$ | $v_{14}$ | $v_{16}$ |
| $v_8$ | $-v_{11}$ | $-v_5$ | $v_9$ | $v_{16}$ | $v_{16}$ | $v_{16}$ | $v_{15}$ |

$g_1$，$g_2$，$g_3$ が生成する $SU(4)$ の部分群を $G_0$ とおく．

**Remark 1** $\mathrm{Ad}(g_1)|_{\mathfrak{a}}$，$\mathrm{Ad}(g_2)|_{\mathfrak{a}}$，$\mathrm{Ad}(g_3)|_{\mathfrak{a}}$，は $SU(4)$ のワイル群 $\simeq \mathcal{S}_4$ を生成するが．$\mathrm{Ad}(g_1)$，$\mathrm{Ad}(g_2)$，$\mathrm{Ad}(g_3)$ が生成する群 $G_0$ は $\simeq \mathcal{S}_4$ でないことに注意する．
実際 $\#(G_0) = 96$ である．

$\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$ の中心を $\mathfrak{z}$ で表すとき，$\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{z}$ で

$$\bigwedge^5(\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})) = \bigwedge^5(\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})) \bigoplus \left(\bigwedge^4(\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})) \wedge \mathfrak{z}\right)$$

となる．直交射影を $\pi : \bigwedge^5(\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})) \to \bigwedge^5(\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}))$ で表す．

### 2.3 $\wedge^5(\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C}))$ の $\mathrm{Ad}(G_0)$ 不変元

$$\xi = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_5} a_{i_1,\cdots,i_5}\, v_{i_1,\cdots,i_5}$$

とおく．$\{v_I : I = (i_1,\cdots,i_5),\ 1 \le i_1 < \cdots < i_5 \le 16\}$ は $\wedge^5(\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C}))$ の基底で $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\mathrm{ad}(H)\cdot v_I = (\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_5})(H)v_I$$

を満たす．$\xi \in \wedge^5(\mathfrak{gl}(4,\mathbb{C}))$ を，$\mathrm{Ad}(SU(4))$ 不変元とするとき，$\xi$ は $\mathrm{Ad}(T)$ 不変だから

$$\xi = \sum_{i_1<\cdots<i_5} a_{i_1,\cdots,i_5}\, v_{i_1,\cdots,i_5}$$

とおくとき，すべての $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\mathrm{ad}(H)\,\xi = \sum_I (\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_5})(H)\, v_{i_1,\cdots,i_5}, \quad H \in \mathfrak{t}$$

となり，$a_{i_1,\cdots,i_5} \neq 0$ ならば $(\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_5})(H) = 0$ である．すなわち

$$\Xi = \{I = (i_1, i_2, \cdots, i_5) \mid \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_5} = 0,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_5 \leq 16\}$$

として

$$\mathcal{Z} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_I : I \in \Xi\}$$

とおくとき $\xi \in \mathcal{Z}$ である．

詳細は省略するが，$G_0$ 作用のもとで $\mathcal{Z}$ は，10 個の既約部分空間の直和に分解される．さらに，10 個ある既約部分空間の中で $\bigwedge^5 \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ に含まれる 0 でない $G_0$ 不変元をもつものは 7 個である．以下，そのような不変既約部分空間と $G_0$ 不変元を挙げておく．

$$\mathcal{Z}_3 = \mathrm{span}\left\{X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \wedge X_{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \wedge X_{\varepsilon_k-\varepsilon_i} \wedge H_{\varepsilon_i} \wedge H_{\varepsilon_j}\right\}, \qquad \xi_3 = \frac{1}{4}\sum_{g\in G_0} g \cdot v_{1,7,11,13,15}.$$

$$\mathcal{Z}_4 = \mathrm{span}\left\{X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \wedge X_{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \wedge X_{\varepsilon_k-\varepsilon_i} \wedge H_{\varepsilon_i} \wedge H_{\varepsilon_l}\right\}, \qquad \xi_4 = \frac{1}{4}\sum_{g\in G_0} g \cdot v_{1,7,11,13,14}.$$

$$\mathcal{Z}_5 = \mathrm{span}\left\{X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \wedge X_{\varepsilon_j-\varepsilon_i} \wedge X_{\varepsilon_i-\varepsilon_k} \wedge X_{\varepsilon_k-\varepsilon_i} \wedge H_{\varepsilon_i}\right\}, \qquad \xi_5 = \frac{1}{8}\sum_{g\in G_0} g \cdot v_{1,2,11,12,13}.$$

$$\mathcal{Z}_6 = \mathrm{span}\left\{X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \wedge X_{\varepsilon_j-\varepsilon_i} \wedge X_{\varepsilon_i-\varepsilon_k} \wedge X_{\varepsilon_k-\varepsilon_i} \wedge H_{\varepsilon_j}\right\}, \qquad \xi_6 = \frac{1}{4}\sum_{g\in G_0} g \cdot v_{1,2,11,12,15}.$$

$$\mathcal{Z}_7 = \mathrm{span}\left\{X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \wedge X_{\varepsilon_j-\varepsilon_i} \wedge X_{\varepsilon_i-\varepsilon_k} \wedge X_{\varepsilon_k-\varepsilon_i} \wedge H_{\varepsilon_l}\right\}, \qquad \xi_7 = \frac{1}{8}\sum_{g\in G_0} g \cdot v_{1,2,11,12,14}.$$

$$\mathcal{Z}_9 = \mathrm{span}\left\{X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \wedge X_{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \wedge X_{\varepsilon_k-\varepsilon_l} \wedge X_{\varepsilon_l-\varepsilon_i} \wedge H_{\varepsilon_i}\right\}, \qquad \xi_9 = \frac{1}{4}\sum_{g\in G_0} g \cdot v_{1,5,9,11,13}.$$

$$\mathcal{Z}_{10} = \mathrm{span}\left\{X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \wedge X_{\varepsilon_j-\varepsilon_k} \wedge X_{\varepsilon_k-\varepsilon_i} \wedge X_{\varepsilon_i-\varepsilon_l} \wedge X_{\varepsilon_l-\varepsilon_i}\right\}, \qquad \xi_{10} = \frac{1}{4}\sum_{g\in G_0} g \cdot v_{1,2,8,10,12}.$$

**Theorem 1** $\bigwedge^5 \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ の $SU(4)$ 不変元は，定数倍を除いて

$$\xi = -\sqrt{-1}\,(\xi_3 + 2\xi_5 - \xi_6 - \xi_9 - \xi_{10})$$

である．

## 参考文献


[1] 間下克哉, $SU(4)/SO(4)$ 上の不変交代形式について数理解析研究所講究録, 1668 (2009), 148–153.