等径超曲面のガウス像の Hamiltonian non-displaceability について

宮岡礼子

ここで述べる結果は入江博氏（茨城大学），Hui Ma 氏（清華大学）, 大仁田義裕氏（大阪市大）との共同研究によるものである [8].

1 導入

定義. (1) (M^{2n},ω) が**シンプレクティック多様体**であるとは，M 上に**シンプレクティック形式**とよばれる非退化 2 次閉形式 ω が存在することである．

(2) $\iota : L \to M$ が**ラグランジュ部分多様体**であるとは，$\dim L = n, \omega|_L = 0$ がなりたつことである．

例. (1) $M = T^*\mathbb{R}^n$ の座標を $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots.p_n) \in T^*\mathbb{R}^n$ とするとき，$\omega = \sum dq^i \wedge dp_i$ はシンプレクティック形式で，$T^*\mathbb{R}^n$ はシンプレクティック多様体である．

このとき $L = \mathbb{R}^n$ 上 $p = 0$ であるから，$\mathbb{R}^n$ はラグランジュ部分多様体である．また，$L = \pi^{-1}(q)$, $q \in \mathbb{R}^n$ もその上で q が一定であるから，ラグランジュ部分多様体である．

(2) 任意のケーラー多様体はそのケーラー形式をシンプレクティック形式とするシンプレクティック多様体である．特に任意の曲面はシンプレクティック多様体で，その上の曲線はラグランジュ部分多様体である．

[Darboux] (M^{2n},ω) がシンプレクティック多様体 のとき，M の局所座標 (q^i,p_i) で，$\omega = \sum dq^i \wedge dp_i$ をみたすものが存在する．

定義. この座標を **Darboux 座標**，または**正準座標**という．

従って，任意のシンプレクティック多様体は局所的に $T^*\mathbb{R}^n$ とシンプレクティック同相となり，局所的には自明である．このことは，**シンプレクティック幾何においては大域的性質が重要である**ことを意味している．

注意. 任意の多様体 X の余接束 T^*X はシンプレクティック多様体である．実際，$(x^1,\dots,x^n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ を T^*X の標準座標とすると，$\omega^X = \sum dx^i \wedge d\xi_i$ は座標の取り方によらない非退化 2 次閉形式となる．

定義． $L \subset (M,\omega)$ をラグランジュ部分多様体とするとき，L の M におけるチューブ近傍 $(N(L), \omega|_{N(L)})$ で，T^*L の 0-断面 $0_L = L$ のチューブ近傍 $(N(0_L), \omega^L|_{N(0_L)})$ とシンプレクティック同相なものが存在する．$N(L)$ を M **における Weinstein 近傍**という．

2 Hamilton 微分同相

以下 (M,ω) をコンパクトシンプレクティック多様体とする．

定義． (1) Hamilton 関数 $H \in C^\infty(M)$ の **Hamilton ベクトル場** X_H とは，$dH = \omega(\ , X_H)$ で決まるベクトル場のことである．

(2) $\{\phi_t^H\}_{t\in[0,1]}$ が M **の Hamilton イソトピー**とは，時間依存する Hamilton 関数 $H : [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ で，$H_t = H(t,\ )$（$H_0 =$ 定数）をみたすものの Hamilton ベクトル場 X_{H_t} から決まる Hamilton フローのことである．

(3) そのタイム 1-写像 $\varphi = \phi_1^H$ を M **の Hamilton 微分同相** という．

これにより

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ham}(M,\omega) = \{\varphi = \phi_1^H \mid H \in C^\infty([0,1]\times M)\} \\
&\quad \subset \mathrm{Symp}_0(M,\omega) = \{\text{ 恒等写像とイソトピックなシンプレクティック同相 }\}
\end{aligned}
$$

を得る．

3 ラグランジュ交叉

多様体 L^n 上の関数 $f \in C^\infty(L)$ に対して

$$L_f = \{(q, df(q))\} \subset T^*L$$

は T^*L のラグランジュ部分多様体である．実際，$f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ とおくと，$df = \sum_{i=1}^n f_i dq^i$ であるから $\omega^L|_L = \sum dq^i \wedge df_i = 0$ である．L_f を T^*L **のラグランジュグラフ**という．

今，T^*L において，0-断面 L と L_f の交叉は $L \cap L_f = \{(q,0)\}$ であるから，$L \cap L_f$ は f の臨界点からなる．従ってもし L がコンパクト，f が L 上のモース関数なら，

$$\#(L \cap L_f) \geq \mathrm{SB}(L, \mathbb{Z}_2),$$

がなりたつ．ここに $\mathrm{SB}(L,\mathbb{Z}_2)$ は L のベッチ数の和である（ここでは $\mathbb{Z}$ 係数でもよい）．

さて，任意の $\varphi \in$Ham(M,ω) に対して，$\varphi^*\omega = \omega$ がなりたつので，L がラグランジュ部分多様体ならば $\varphi(L)$ もラグランジュ部分多様体である．

問題． L を M に埋め込まれたコンパクトラグランジュ部分多様体とするとき，交叉 $L \cap \varphi(L)$ が横断的となる任意の $\varphi \in$Ham(M,ω) に対して，$\#(L \cap \varphi(L)) \geq$SB$(L,\mathbb{Z}_2)$ はなりたつか?

一般にこれは成り立たない．実際 S^2 のふたつの小円は，等長変換で引き離すことができるが，$SB(S^1,\mathbb{Z}_2)=2$ である．他方 S^1 が大円であるときは，Hamilton 変形は $\varphi(S^1)$ で 2 分される S^2 の面積を保つことから，S^1 と $\varphi(S^1)$ を引き離すことはできず，上の不等式が成り立つ．このことから，上の不等式の成立条件を調べることが問題となる．

ラグランジュ部分多様体 L の Weinstein 近傍 $N(L)$ に入るようなラグランジュ部分多様体については，ラグランジュグラフの議論ができる．しかし一般に $\varphi(L)$ は Weinstein 近傍からはみ出すのでこうした議論はできない．これが Hamilton 変形を考える時の難しさである．

4　有限次元多様体のモース理論の復習

M をコンパクト多様体, $f \in C^\infty(M)$ をモース関数とする．

$C_k = \{$ 指数 k の臨界点 $\}$ とおき，任意の $p,q \in \bigcup_{k=0}^n C_k$ に対して

$$\mathcal{M}(p,q) = \{\gamma(t) : \mathbb{R} \to M \mid -\mathrm{grad} f = \frac{d\gamma}{dt},\ \lim_{t\to-\infty} = p,\ \lim_{t\to\infty} = q\}/\sim$$

($\sim$ は径数シフト) と定め，$p \in C_k$ に対して，境界作用素 $\partial : C_k \to C_{k-1}$ を

$$\partial p = \sum_{q \in C_{k-1}} \#\mathcal{M}(p,q) q$$

で与える．ただし $\#\mathcal{M}(p,q)$ はモデュロ 2 で数える．このとき $\partial \circ \partial = 0$ が成り立ち, $\mathbb{Z}_2$ **係数モースホモロジー**が次で定義される．

$$H(M,\mathbb{Z}_2) = \frac{\ker\partial}{\mathrm{Im}\partial}$$

5　ラグランジュ交叉のフレアホモロジー

$L \subset (M,\omega)$ をコンパクトラグランジュ部分多様体, $\varphi = \phi_1 \in$Ham(M,ω)，ϕ_t を付随するフローとして，次のパスの集合を考える：

$$\Omega = \{l : [0,1] \to M \mid l(0) \in L, l(1) \in \varphi(L), l \text{ は } \phi_t(x_0) \text{ にイソトピック}\}$$

[Floer][7] すべての $v:(D^2,\partial D^2)\to(M,L)$ に対して，$\displaystyle\int_D v^*\omega=0$ を仮定すると，

(1) Ω 上の汎関数 $F:\Omega\ni l\mapsto F(l)\in\mathbb{R}$ が存在して，$l\in\Omega$ が F の臨界点であるのは $\dfrac{dl}{dt}=0$ のとき，つまり，l が定値写像 $l(t)=p\in L\cap\varphi(L)$ のときとなる．

(2) ω と両立する時間依存概複素構造の族 $J=\{J_t\}_{0\le t\le 1}$ に対して，

$$\mathrm{grad}F=J_t\frac{dl}{dt} \tag{1}$$

がなりたつ．

さて今，$p,q\in L\cap\varphi(L)$ に対して，$u(s,t)=l(t)(s)$ と表し，

$$\mathcal{M}(p,q)=\{u:\mathbb{R}\times[0,1]\to M\mid\frac{\partial u}{\partial s}=-\mathrm{grad}F,\ \lim_{s\to-\infty}u=p,\lim_{s\to\infty}u=q\}/\sim$$

と定める．$\sim$ は径数シフトの同一視を表す．(1) により $u\in\mathcal{M}(p,q)$ は $\dfrac{\partial u}{\partial s}+J_t\dfrac{du}{dt}=0$ をみたすので，**J-正則ストリップ** とよぶ.

事実. (1) $p\in L\cap\varphi(L)$ において交叉が横断的な時，**Maslov-Viterbo 指数** とよばれる $\mu(p)\in\mathbb{Z}$ を定めることができて，$\mathcal{M}(p,q)$ は $(\mu(p)-\mu(q)-1)$ 次元の可微分多様体である．

(2) $\mu(p)-\mu(q)=1$ のとき $\mathcal{M}(p,q)$ はコンパクトである．

(3) $\mu(p)-\mu(q)=2$ のとき $\exists\ \mathcal{M}(p,q)$ の境界は次で与えられる．

$$\bigcup_{\mu(r)=\mu(p)-1}\mathcal{M}(p,r)\times\mathcal{M}(r,q)$$

次に $CF_k:=\{p\in L\cap\varphi(L)\mid\mu(p)=k\}$ とおくと，$\partial_J:CF_k\to CF_{k-1}$ は

$$\partial_J p=\sum_{q\in CF_{\mu(p)-1}}\#\mathcal{M}(p,q)q$$

で与えられる．ただし $\#\mathcal{M}(p,q)$ はモデュロ 2 で数える．このとき $\partial_J\circ\partial_J=0$ が成り立ち **フレアホモロジー**

$$HF(L)=\frac{\ker\partial_J}{\mathrm{Im}\partial_J}$$

が定義される．F は $\displaystyle\int_D v^*\omega=0$ の仮定のもと定義されたことに注意.

[Floer][7] (1) $HF(L)$ は H_t と J_t の取り方によらない.

(2) $\pi_2(M,L)=0$ であれば $HF(L)\cong H_*(L,\mathbb{Z}_2)$.

定義. ある $\varphi\in$Ham(M,ω) に対して $L\cap\varphi(L)=\emptyset$ のとき, ラグランジュ部分多様体 $L\subset(M,\omega)$ **は Hamiltonian displaceable** であるという.

$HF(L)$ は $\mathcal{C}=L\cap\varphi(L)$ により生成されるから，L が Hamiltonian displaceable ならば $HF(L)=0$．従って

事実.

$$\boxed{HF(L)\neq 0\Rightarrow \forall\varphi\in \mathrm{Ham}(M,\omega), L\cap\varphi(L)\neq\emptyset}$$

定義. 任意の $\varphi\in\mathrm{Ham}(M,\omega)$ に対して $L\cap\varphi(L)\neq\emptyset$ であるとき，L **は Hamiltonian non-displaceable** であるという.

注意. 逆: $L\cap\varphi(L)\neq\emptyset\Rightarrow HF(L)\neq 0$ は**必ずしも成り立たない**.

6　Y.G.Oh によるフレアホモロジーの一般化

Floer のおいた条件 $\int_D v^*\omega=0$ は強すぎて使えないことが多いため，Y.G.Oh は条件を緩めて，フレアホモロジーを使いやすくした [13],[15].

$I_\omega:\pi_2(M,L)\to\mathbb{R}$ を $u:(D,\partial D)\to(M,L),[u]=A$ に対して

$$I_\omega(A)=\int_D u^*\omega$$

と定める．$\Lambda(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ のラグランジュ部分空間の集合とするとき，$\tilde{u}=u|_{\partial D}:S^1\to\Lambda(\mathbb{C}^n)$ とおく．$\mu\in H^1(\Lambda(\mathbb{C}^n),\mathbb{Z})$ を L の Maslov 類とするとき，$I_{\mu,L}:\pi_2(M,L)\to\mathbb{Z}$ を

$$I_{\mu,L}(A)=\mu(\tilde{u})$$

で定める.

定義. (1) L が **モノトーン**であるとは， $\lambda>0$ が存在して $I_{\mu,L}=\lambda I_\omega$ をみたすこと.

(2) $I_{\mu,L}$ の像の正の生成元 N_L を**最小 Maslov 数**とよぶ.

[Y.G.Oh] [13], [15] L がモノトーンで，最小 Maslov 数 $N_L\geq 2$ をもつならば，(H,J) に対して $HF(L):=H_*(CF(L),\partial_J)$ が定義できる．これを L の $\mathbb{Z}_2$-係数**フレアホモロジー**とよぶ．$HF(L)$ は L の Hamilton イソトピーで不変である.

このとき，境界作用素は $\nu = \left[\dfrac{\dim L+1}{N_L}\right]$ に対して

$$\partial_J = \partial_0 + \partial_1 + \cdots + \partial\nu, \quad \partial_l : CF_*(L) \to CF_{*-1+lN_L}(L)$$

で与えられる．ここに ∂_0 はモースの境界作用素で，残りは J-正則ストリップに関係する作用素で，添え字がジャンプする．従って $HF(L)$ の計算は，ν が小さいならば容易であるが，ν が大きくなると難しい．

事実. $l > \nu \Rightarrow \partial_l = 0$.

$(\because l > \dfrac{\dim L+1}{N_L} \Rightarrow -1 + lN_L > \dim L \Rightarrow CF_{*-1+lN_L} = 0.\ )$

このように，N_L が大きいと ν は小さいので，$HF(L)$ の計算可能性は高い．

注意. $N_L = 2$ のときは，$HF(L)$ の計算には J-正則円盤の分類が必要となるので難しい．

フレアホモロジーの計算は，トーリックファイバーなどの例を除きあまりなされていない．我々は等径超曲面のガウス像という豊富な例について，まず計算の手がかりとなる Hamiltonian non-displaceability を考察する．

7　等径超曲面とその Gauss 像

$N^n \subset S^{n+1}$ を等径超曲面，つまり主曲率一定超曲面とする．ここに主曲率 $\kappa_1 > \cdots > \kappa_g$ はそれぞれ，重複度 $m_1, \ldots, m_g$ を持つとする．

[Münzner] [12] $g \in \{1,2,3,4,6\}$ で，$m_i = m_{i+2}$ $(i : \mathrm{mod}\ g)$ がなりたつ．

また，次のことが知られている．

1. $g = 1$ のとき N は超球面 $S^n(r)$, $0 < r < 1$.
2. $g = 2$ のとき N は Clifford 超曲面 $S^k(r) \times S^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$, $0 < r < 1$.
3. $g = 3$ のとき N は射影平面 $\mathbb{F}P^2$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathcal{C}ay)$ の標準埋め込みのチューブで，これらは **Cartan 超曲面**とよばれる [3].
4. $g = 4$ のときは，$(m_1, m_2) \neq (7, 8)$ ならば，Clifford 環の表現を用いた OT-FKM 型とよばれる無限個の等質，非等質な等径超曲面と，この型でない 2 種の等質超曲面である [16],[6].
5. $g = 6$ のとき N は 2 種の等質超曲面に限る [5],[11].

$*$ $g = 1, 2, 3, 6$ のとき, 等径超曲面は等質である（分類済み）.

向きづけられた 2 平面のグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}^+(2, \mathbb{R}^{n+2})$ は，複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ と同一視できる．そこで，S^{n+1} の超曲面 N の単位法ベクトルを n として，**Gauss 写像**を次で定める．

$$\mathcal{G} : N \ni p \mapsto x(p) + \sqrt{-1}n(p) \in Q_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Gr}^+(2, \mathbb{R}^{n+2})$$

[B. Palmer] [17]N を等径超曲面とするとき, $L = \mathcal{G}(N)$ は $Q_n(\mathbb{C})$ の極小ラグランジュ部分多様体である.

注意. (1) $Q_n(\mathbb{C})$ は正曲率をもつ Kähler-Einstein 多様体で，このとき L **はモノトーン**となる.

(2) $g = 1$ のとき $L = S^n \subset Q_n(\mathbb{C})$ でこれは実形である.

(3) $g = 2$ のとき $L = S^k \times S^{n-k}/\mathbb{Z}_2$ でこれは実形である.

(4) これらどちらの場合も $HF(L) \cong H_*(L, \mathbb{Z}_2)$ となる ([14], [9]).

[Ma-Ohnita] [10] $L = \mathcal{G}(N)$ のとき,

$$N_L = \frac{2n}{g} = \begin{cases} m_1 + m_2 & g : \text{偶数} \\ 2m & g : \text{奇数} \end{cases}$$

8 主結果

主定理 [IMMO] [8]

(1) $g = 3$ のとき $L = \mathcal{G}(N)$ は $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面である.

特に $m = m_i \geq 2$ なら $HF(L) \cong H_*(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda$

従って交叉が横断的なら,

$$\#L \cap \varphi(L) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2).$$

(2) $g = 4$ かつ $2 \leq m_1 \leq m_2$ なら L は Hamiltonian non-displaceable.

(3) $g = 6$ かつ $m = m_i = 2$ なら L は Hamiltonian non-displaceable.

注意. Λ はあるローラン多項式環. $m_i \geq 2$ は $N_L \geq 3$ のために必要.

証明の流れ. (1) まず L が $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面であることを示し，それから Biran-Cornea[2] の議論を用いて $HF(L) \cong H_*(L, \mathbb{Z}_2) \otimes \Lambda$ を得る．

(2) と (3) の証明には Damian のスペクトル系列を用いる．つまり被覆 $\bar{L} = N \to L = N/\mathbb{Z}_g$ をとって，フレア複体を $\bar{L}$ にリフトする．

Damian によるリフトされたフレアホモロジー $HF^{\bar{L}}(L)$ が定義できるとき，スペクトル系列を用いることにより，$HF^{\bar{L}}(L) = 0$ を仮定すると，通常のモースホモロジー $H_*(N, \mathbb{Z}_2)$（既知）と矛盾することが示される．

こうして $HF^{\bar{L}}(L) \neq 0$ が得られ， 任意の $\varphi \in \mathrm{Ham}(Q_n(\mathbb{C}), \omega_{\mathrm{std}})$ に対して $L \cap \varphi(L) \neq \emptyset$ がわかる．

9 Damian によるモノトーンラグランジュ部分多様体のリフトされたフレアホモロジー

(M, ω) をコンパクトシンプレクティック多様体，$L \subset M$ を $N_L \geq 3$ をみたす埋め込まれたコンパクトモノトーンラグランジュ部分多様体とする．

2 点 $p, q \in \mathcal{C} = L \cap \varphi(L)$ に対して，p, q を結ぶ孤立した J-正則ストリップ $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ を考え，

$$\Gamma = \bigcup_{p,q \in \mathcal{C}} \{\gamma \mid \gamma(s) := u(s,0), \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

とおく．点とパスの集合 $(\mathcal{C}, \Gamma)$ はフレア複体 $(\bigcup_k CF_k(L), \partial_J)$ を再構成する．

$(\mathcal{C}, \Gamma)$ から始め, 任意の被覆 $\pi : \bar{L} \to L$ を固定して，$\bar{\Gamma}$ を Γ の全てのパスの $\bar{L}$ へのリフトの集合とする．

$\pi^{-1}(p) = \{p_i\}_{i \in I}$，$\pi^{-1}(q) = \{q_i\}_{i \in I}$ とおくと，$p_i, q_j \, (i, j \in I)$ に対して，#$\{p_i$ と q_j をつなぐ $\bar{\Gamma}$ の元$\} < \infty$ がわかるので，そのパリティを $n(p_i, q_j)$ とおく．

$CF^{\bar{L}}(L)$ を $\bigcup_{p \in \mathcal{C}} \pi^{-1}(p)$ で生成される自由 $\mathbb{Z}_2$-加群として，$CF^{\bar{L}}(L)$ の境界作用素 $\partial^{\bar{L}}$ を次で定義する．

$$\partial^{\bar{L}}(p_i) = \sum_{\pi(q_j) = q \in \mathcal{C}} n(p_i, q_j) q_j.$$

[Damian] [4] L を M のコンパクトモノトーンラグランジュ部分多様体で，$N_L \geq 3$ をみたすものとする． $\bar{L} \to L$ を任意の被覆, $(CF^{\bar{L}}(L), \partial^{\bar{L}})$ をリフト複体とするとき，そのホモロジー $HF^{\bar{L}}(L) := H_*(CF^{\bar{L}}(L), \partial^{\bar{L}})$ を L **のリフトされたフレアホモロジー** とよぶ．これは L の Hamilton イソトピーで不変である．

これは，Damian が，Biran のスペクトル系列 [1] を L のリフトに適用できることを示して得た結果である．

我々は，等径超曲面がガウス像を有限被覆していることと，等径超曲面のホモロジーがよく知られていることから，Damian のリフトされたフレアホモロジーが証明の道具に使えるとの入江氏のアイディアに従い，計算を行って主結果を得た．

10　未解決問題と予想

問題 1. $g = 3$ かつ $m = 1$ の場合を解決せよ．
2. $g = 4$ かつ $(m_1, m_2) = (1, k)$ の場合を解決せよ．
3. $g = 6$ かつ $m = 1$ の場合を解決せよ．
4. 各々の場合に $HF(L)$ を計算せよ．

小野肇氏と IMMO の予想．

コンパクト型の既約エルミート対称空間において，
任意のコンパクト極小ラグランジュ部分多様体は
Hamiltonian non-displaceable である．

References

[1] P. Biran, *Lagrangian non-intersections,* Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 279–326.

[2] P. Biran and O. Cornea, *Rigidity and uniruling for Lagrangian submanifolds,* Geom. Topol. **13** (2009), 2881–2989.

[3] É. Cartan, *Sur des familles remarquables d'hpersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques*, Math. Z. **45** (1939), 335-367.

[4] M. Damian, *Floer homology on the universal cover, Audin's conjecture and other constrains on Lagrangian submanifolds,* Comment. Math. Helv. **87** (2012), 433–462.

[5] J. Dorfmeister and E. Neher, *Isoparametric hypersurfaces, case* $g = 6$, $m = 1$, Comm. Algebra **13** (1985), 2299–2368.

[6] D. Ferus, H. Karcher and H. F. Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen*, Math. Z. **177** (1981),479–502.

[7] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections,* J. Differential Geom. **28** (1988), 513–547.

[8] H. Iriyeh, H. Ma, R. Miyaoka and Y Ohnita, *Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces*, arXiv: math.DG1510.05057.

[9] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type,* J. Math. Soc. Japan **65** (2013), 1135–1151.

[10] H. Ma and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces. I,* J. Differential Geom. **97** (2014), 275–348.

[11] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with* $(g, m) = (6, 2)$, Ann. of Math. (2) **177** (2013), 53–110, *Errata of " Isoparametric hypersurfaces with* $(g, m) = (6, 2)$, *available at http://www.math.tohoku.ac.jp/people/miyaoka/publication-ev3.html*

[12] H. F. Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, and II*, Math. Ann. **251** (1980), 57–71, **256** (1981), 215–232.

[13] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic discs I,* Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–994; Addendum **48** (1995) 1299–1302.

[14] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic discs III,* H. Hofer, et al. (Eds.), The Floer Memorial Volume, Birkhäuser, Basel, 1995, 555–573.

[15] Y.-G. Oh, *Floer cohomology, spectral sequences, and the Maslov class of Lagrangian embeddings,* Int. Math. Res. Not. **7** (1996), 305–346.

[16] H. Ozeki and M. Takeuchi, *On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I and II*, Tohoku Math. J. **27** (1975), 515–559, **28** (1976), 7–55.

[17] B. Palmer, *Hamiltonian minimality and Hamiltonian stability of Gauss maps,* Diff. Geom. and its Appl. **7** (1997), 51–58.

Mathematical Institute, Tohoku University, Sendai
e-mail:r-miyaok@m.tohoku.ac.jp