スライス表現に 0 でない固定点を持たないリーマン部分多様体について *

武富雄一郎 †(広島大学大学院理学研究科 D3)

概要

リーマン部分多様体の外在的等長変換のなす群の法空間への自然な表現 (full slice representation) が 0 以外の固定点を持たないとき, その部分多様体を arid submanifold と呼ぶことにする．本稿では, arid submanifold の基本的な性質といくつかの具体例を紹介する．

1 arid submanifold

X を完備連結リーマン多様体, Y を X のリーマン部分多様体とする．$\mathrm{Isom}(X)$ を X の等長変換のなす群とする．X の等長変換 $f \in \mathrm{Isom}(X)$ が, Y を保つ (*i.e.* $f(Y) = Y$) とき, f は Y の外在的等長変換であるという．Y の外在的等長変換全体のなす群を $N(Y)$ とする．すなわち,

$$N(Y) := \{f \in \mathrm{Isom}(X) \mid f(Y) = Y\}.$$

外在的等長変換群 $N(Y)$ は X および Y に等長的に作用する．点 $p \in X$ に対し, p における固定部分群を $N(Y)_p := \{f \in N(Y) \mid f(p) = p\}$ と書く．

Definition 1.1. 部分多様体 Y の点 $p \in Y$ に対して, $N(Y)_p$ の法空間 $(T_pY)^\perp$ への自然な作用

$$g.\xi := (dg)_p\xi, \quad (g \in N(Y)_p,\ \xi \in (T_pY)^\perp)$$

を部分多様体 Y の p における *full slice representation* と呼ぶことにする．

本稿では, この full slice representation に関して, 以下のような対称性を持ったリーマン部分多様体を扱う．

Definition 1.2. 任意の Y の点 p に対して, Y の p における full slice representation が 0 でない固定点を持たないとき, Y を *arid submanifold* と呼ぶことにする．

いいかえると, arid submanifold とは, リーマン部分多様体 Y であって, 以下の性質を満たすものである：任意の点 $p \in Y$ と任意の法ベクトル $\xi \in (T_pY)^\perp \setminus \{0\}$ に対して, ある X の等長変換 $f : X \to X$ が存在して,

$$f(p) = p, \quad f(Y) = Y, \quad (df)_p\xi \neq \xi.$$

---

* 部分多様体論・湯沢 2015 記録集

† Email: `y-taketomi@hiroshima-u.ac.jp`

Remark 1.3. “arid” とは, 「乾燥した」, 「草木が生えない」などの意味を持った英単語である. arid submanifold という命名は「full slice representation で不変な法ベクトル」を「部分多様体に生えている草木」に見立てていることに由来している. arid submanifold とは不変な法ベクトルが存在しない部分多様体であった. この例えにのっとるなら, arid submanifold とは, 「草木が生えない」部分多様体である. これが, arid submanifold の名前の由来である. この命名は筆者による.

例えば, 一般に, リーマン部分多様体の平均曲率ベクトルは full slice representation で不変な法ベクトルである. よって以下が従う：

Proposition 1.4. arid submanifold は極小部分多様体である.

ゆえに arid submanifold は極小部分多様体の扱いやすい具体例を提供することが期待される. これが, arid submanifold を考える動機の 1 つである.

2 arid submanifold の位置付け

リーマン部分多様体論において, arid submanifold は以下のような位置付けにある：

$$
\begin{array}{ccc}
\text{鏡映部分多様体 ([7])} & \Rightarrow & \text{全測地的部分多様体} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{弱鏡映部分多様体} & \Rightarrow & \text{austere submanifold([4])} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{arid submanifold} & \Rightarrow & \text{極小部分多様体}
\end{array}
$$

右の列の全測地的, austere, 極小の 3 つの部分多様体は曲率の性質から定義される概念であった. 鏡映は全測地的を, 弱鏡映は austere を, arid は極小を, 外在的等長変換群の作用による対称性の観点から特殊化したものであるといえる.

ここで, arid submanifold にも関係している弱鏡映部分多様体について説明する. 弱鏡映部分多様体は井川–酒井–田崎によって導入された概念である. 定義は以下の通りである.

Definition 2.1 ([6])**.** リーマン部分多様体 Y が弱鏡映部分多様体であるとは, Y が以下の性質を満たすことをいう：任意の点 $p \in Y$ と任意の法ベクトル $\xi \in (T_pY)^\perp$ に対して, ある X の等長変換 $f : X \to X$ が存在して,

$$f(p) = p, \quad f(Y) = Y, \quad (df)_p\xi = -\xi.$$

いいかえると, 弱鏡映部分多様体とは, 任意の法ベクトルを full slice representation で “反転させることができる” 部分多様体である. 一方, arid submanifold は任意の (0 でない) 法ベクトルを full slice representation で “何かしら動かすことができる” 部分多様体であった. ゆえに, arid submanifold は弱鏡映部分多様体の一般化である.

Remark 2.2. arid submanifold は弱鏡映部分多様体とも極小部分多様体とも違うものである：

(1) 弱鏡映部分多様体でない arid submanifold は存在する. 例えば, 既約リーマン対称空間の s-representation の軌道で弱鏡映になるものは, 井川–酒井–田崎によって分類されている ([6]).

一方で, 次の項で見るように, 固有等長作用の孤立軌道は arid submanifold である. 分類を眺めてみると, 孤立軌道だが弱鏡映になっていないものがあるということが分かる.

(2) arid submanifold でない極小部分多様体は存在する. 例えば, $\mathbb{R}^3$ 内のカテノイド曲面は arid submanifold でない極小部分多様体である.

ただし, 部分多様体が超曲面 (*i.e.* 余次元が 1) である場合, arid と弱鏡映の概念は一致する. 実際, 法空間が 1 次元ならば, full slice representation で法ベクトルを "(-1) 倍する" ことと "何かしら動かす" ことは同値である.

3 等質な arid submanifold

この項では, 等質な arid submanifold は何らかの等長作用の孤立軌道として実現できることをみる：

Theorem 3.1. *Y を閉かつ等質な arid submanifold とする. このとき, ある Lie 部分群 $G \subset \mathrm{Isom}(X)$ が存在して, Y は G-作用の孤立軌道となる.*

ここで, 等質とは, 外在的等質 (*i.e.* 外在的等長変換群 $N(Y)$ が推移的に作用していること) を意味するものとする.

最初に, 等長作用の orbit type について復習する. G を $\mathrm{Isom}(X)$ の Lie 部分群とする. 点 $p \in X$ に対し, 軌道 $G.p$ の orbit type とは, p における固定部分群 G_p の G に関する共役類のことであった. 例えば, 2 つの軌道 $G.p$ と $G.q$ が同じ orbit type とはある $g \in G$ が存在して, $gG_pg^{-1} = G_q$ となることである.

Definition 3.2 ([5])**.** G を $\mathrm{Isom}(X)$ の Lie 部分群, $p \in X$ とする. このとき, 軌道 $G.p$ が孤立軌道であるとは, $G.p$ の近傍に $G.p$ と同じ orbit type を持つ軌道が存在しないこと. すなわち, X の開集合 $U \supset G.p$ が存在して, 任意の $q \in U \setminus G.p$ に対して, $G.p$ と $G.q$ の orbit type が同じにならないことをいう.

部分群 $G \subset N(Y)$ に対して, Y が *G-arid submanifold* であるとは, 任意の法ベクトル $\xi \in T_pY^\perp \setminus \{0\}$ に対して, ある $f \in G \cap N(Y)_p$ が存在して, $(df)_p\xi \neq \xi$ となることをいう. すなわち, G-arid submanifold とは, 外在的等長変換群 $N(Y)$ 全体を使わなくとも, もっと小さい群 $G \subset N(Y)$ による slice representation だけで, 法ベクトルをすべて動かせてしまう arid submanifold である.

Proposition 3.3. *G を $\mathrm{Isom}(X)$ の Lie 部分群とし, G は X に固有に作用しているとする. 点 $p \in X$ に対し, 以下は同値である：*

(1) 軌道 $G.p$ は孤立軌道である.
(2) 軌道 $G.p$ は G-arid submanifold である.

Remark 3.4. 完備連結リーマン多様体への等長固有写像については, 分かりやすい特徴付けがある. X への等長 G-作用が固有であることの必要十分条件は G が $\mathrm{Isom}(X)$ の閉部分群であることである ([2], [10]).

Proposition 3.3 の証明は, 固有 G-作用に対する G-同変管状近傍の存在定理 (*c.f.* [3], Theorem B.24) による．一方, Y が閉部分多様体ならば, $N(Y)$ は $\mathrm{Isom}(X)$ の閉部分群になる．このことより, Theorem 3.1 の証明は, $G = N(Y)$ とおいて Proposition 3.3 を適用すれば, 直ちに終わる.

Remark 3.5. Theorem 3.1 の主張について注意する．“G-作用の軌道 $G.p$ が arid submanifold ならば, $G.p$ は G-作用の孤立軌道である” という主張は正しくない．一般に, arid submanifold $G.p$ を孤立軌道として実現するためには, G より大きな群 $G' \supset G$ で $G'.p = G.p$ となるものを取り直す必要がある.

まとめると, 等質な arid submanifold は本質的には孤立軌道である．その意味では, 等質な arid submanifold には目新しさはあまりない．ゆえに, 非等質な arid submanifold を研究するのが今後の課題である.

4 arid submanifold のさらなる具体例の構成

非等質な arid submanifold の研究のためにも, arid submanifold のさらなる具体例の構成は重要な課題である．この項では, 等長固有な G-作用において, 同じ orbit type を持つ軌道を “よせ集める” という操作で, arid submanifold が得られることを見る．正確には以下の通りである. $G \subset \mathrm{Isom}(X)$ を Lie 部分群とする．点 $p \in X$ に対して, X の部分集合 $\mathfrak{S}(G.p)$ を以下で定義する：

$$\mathfrak{S}(G.p) := \text{“}\{q \in X \mid G.p \text{ と } G.q \text{ は同じ orbit type を持つ }\} \text{ の } p \text{ を含む連結成分”}.$$

Proposition 4.1 ([3], Corollary B.45)**.** 固有 G-作用に対して, $\mathfrak{S}(G.p)$ は X の部分多様体.

Proposition 4.1 も G-同変管状近傍の存在定理から従う．証明は [3] を参照のこと.

Remark 4.2. Proposition 4.1 により, X への固有 G-作用があると, X は部分多様体 $\mathfrak{S}(G.p)$ 達の disjoint union として表わされる． この X の分割を X の (G-作用に関する) *orbit type stratification* と呼ぶ．また, 各 $\mathfrak{S}(G.p)$ を *orbit type strata* と呼ぶ.

例えば, $G.p$ として, G-作用の主軌道をとると, よく知られているように, $\mathfrak{S}(G.p)$ は X の中の開集合になる．しかし, 一般に $\mathfrak{S}(G.p)$ は開部分多様体とは限らない非自明な部分多様体になる.

Proposition 4.3. 固有 G-作用に対して, $\mathfrak{S}(G.p)$ は G-arid submanifold.

Proposition 4.3 は, 点 q における $\mathfrak{S}(G.p)$ の接空間 $T_q\mathfrak{S}(G.p)$ が以下のように表わされることから従う：

$$T_q\mathfrak{S}(G.p) = T_q(G.p) \oplus \{\xi \in T_q(G.p)^{\perp} \mid \forall f \in G_q,\ (df)_q\xi = \xi\}.$$

Proposition 4.3 によると, 何でもよいから固有等長作用を 1 つ選び, 適当な orbit type を 1 つ選べば, X 内に非自明な arid submanifold が作れる．これにより, arid submanifold の例が豊富に得られる.

Remark 4.4. $\mathfrak{S}(G.p)$ は一般には完備ではない．その意味では, Proposition 4.3 から非等質な arid submanifold の例が得られることになるが, やはり, 完備な例が欲しい．Proposition 4.3 を用

いて, 完備非等質な arid submanifold の例を探すことが今後の課題である.

参考文献

[1] Jürgen Berndt, Sergio Console, and Carlos Olmos, *Submanifolds and holonomy*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 434, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

[2] J. Carlos Diaz-Ramos, *Proper isometric actions*, arXiv:0811.0547 (2008).

[3] Victor Guillemin, Viktor Ginzburg, and Yael Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, Appendix J by Maxim Braverman.

[4] Reese Harvey and H. Blaine Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47–157.

[5] Wu-yi Hsiang, *On the compact homogeneous minimal submanifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **56** (1966), 5–6.

[6] Osamu Ikawa, Takashi Sakai, and Hiroyuki Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437–481.

[7] Dominic S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, J. Differential Geometry **8** (1973), 153–160.

[8] Richard S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 295–323.

[9] Fabio Podestà, *Some remarks on austere submanifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **11** (1997), no. 2, suppl., 157–160.

[10] J. Szenthe, *Proper isometric actions on Riemannian manifolds*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **51** (2008), 11–17 (2009).

[11] Yuichiro Taketomi, *On a Riemannian submanifold whose slice representation has no nonzero fixed point — an introduction*, Proceedings of the 19th International Workshop on Hermitian-Grassmannian Submanifolds and Its Applications [Volume 19], Natl. Inst. Math. Sci. (NIMS), Taejŏn, 2016, pp. 225–231.

[12] Masaru Takeuchi and Shoshichi Kobayashi, *Minimal imbeddings of R-spaces*, J. Differential Geometry **2** (1968), 203–215.