極小曲面の Darboux 変換 *

本田　淳史 †‡

概要

本稿では，Udo Hertrich-Jeromin 氏との共同研究 [9] において得られた，双等温曲面 (isothermic surface) に対する Darboux 変換，Christoffel 変換，Goursat 変換の間の可換律定理 (permutability theorem) を紹介する．その応用として，極小曲面の Darboux 変換に対する Weierstrass データの変換公式の直接的な証明を与える．また，今回得られた手法をミンコフスキー空間の極大曲面に適用した最近の研究についても報告する．

1　イントロダクション

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の**双等温曲面** (isothermic surface) とは，各非臍点のまわりで共形曲率線座標がとれる曲面のことである．平均曲率一定曲面*1 や極小曲面は双等温であることが知られている．それらに対して，Christoffel 変換や Darboux 変換が定義される．平均曲率一定曲面の Christoffel 変換は平行な平均曲率一定曲面*2，極小曲面の Christoffel 変換はそのガウス写像を与えるが，Darboux 変換はそれぞれに対して非自明な変換を与える．平均曲率一定曲面の Darboux 変換は simple factor dressing という操作と同値であることが知られている [7, 10, 2] (cf. [12])．

Martínez-Roitman-Tenenblat [13] は Darboux 変換により得られる極小曲面の漸近挙動を調べた．とくに，臍点をもたない極小曲面の Darboux 変換の新しいエンドは平坦エンドとなることや，臍点がエンドに移る場合にはそのエンドは埋め込みとならないことを示した．これらの結果は，極小曲面の Weierstrass データが Darboux 変換でどのように変化するかを記述する **Weierstrass データの変換公式**をもとにして得られる．

事実 1.1 (Weierstrass データの変換公式, [13, Corollary 3.4])**.** リーマン面 M^2 に対し，$f, \hat{f} : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を平坦でない極小曲面とし，それぞれの *Weierstrass* データを (g, ω), $(\hat{g}, \hat{\omega})$ とする．このとき，$\hat{f}$ が f の *Darboux* 変換となる必要十分条件は定数 $k \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ と M^2 上の 0 でない

---

* 本研究は独立行政法人日本学術振興会 (JSPS) とオーストリア科学財団 (FWF) との 2 国間共同研究による支援を受けたものである．

† 都城工業高等専門学校 〒885-8567 宮崎県都城市吉尾町 473 番 1

‡ atsufumi@cc.miyakonojo-nct.ac.jp

*1 本稿では，平均曲率一定曲面を平均曲率が一定である曲面で極小でないものとする．

*2 平均曲率一定-H 曲面 f に対し，$f + \frac{1}{H}\nu$ により定まる平行曲面．

正則関数 ψ が存在して

$$d\psi = k\psi^2\omega - dg, \qquad (\hat{g}, \hat{\omega}) = \left(g + \psi, \frac{dg}{k\psi^2}\right) \tag{1.1}$$

となるときである．

Martínez-Roitman-Tenenblat [13] はこの Weierstrass データの変換公式を得るために，$\boldsymbol{R}^3$ の (向き付けられた) 球面のなす空間を 4 次元ミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}^4_1$ と対応付けることで，$\boldsymbol{R}^3$ の球面叢を $\boldsymbol{R}^4_1$ の曲面として調べた．この同一視のもと，$\boldsymbol{R}^3$ の極小 Darboux ペア[*3]は 3 次元双曲空間 H^3 の平坦波面と対応付けられることを示し，Kokubu-Umehara-Yamada [11] による双曲的ガウス写像の Weierstrass 型の表現公式を用いることで極小曲面の Darboux 変換に対する Weierstrass データの変換公式を導いた．

本稿では，Udo Hertrich-Jeromin 氏との共同研究 [9] で得られた，Weierstrass データの変換公式 (事実 1.1) の直接的証明を紹介する．それは，極小曲面の Weierstrass 表現公式が (一般化された) Goursat 変換であることに注目し，双等温曲面に対する Goursat, Darboux, Christoffel 変換の間の可換律定理 (permutability theorem) を示すことにより従う．

2 Christoffel, Goursat, Darboux 変換

2.1 Christoffel 変換

双等温曲面 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，曲面 $f^* : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ で

- f と f^* は対応する点で同じ接平面を持つ．つまり各点 $p \in M^2$ において $df(T_pM^2) = df^*(T_pM^2)$ が成り立つ．
- f と f^* の型作用素 A, A^* は可換であり[*4]，$\det A^* \det A \leq 0$ が成り立つ．
- f と f^* の誘導計量が共形同値

を満たすものが局所的に存在し，それらは相似変換を除いて一意的である．そのような曲面 $C(f) := f^*$ は f の **Christoffel 変換**，もしくは Christoffel dual と呼ばれる．極小曲面の Christoffel 変換はその Gauss 写像 ν となることが知られており，逆も成り立つ [7]．

2.2 Goursat 変換

極小曲面 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ は，ある正則 null 曲線 $\Psi : M^2 \to \boldsymbol{C}^3$ の実部 $f = \mathrm{Re}\,\Psi$ と表すことができる．このとき，直交変換 $A \in \mathrm{O}(3, \boldsymbol{C})$ を用いて定まる極小曲面 $\tilde{f} = \mathrm{Re}(A\Psi)$ は f の Goursat 変換と呼ばれる．このような (極小曲面に対する) Goursat 変換は Gauss 写像に Möbius 変換と

*3 互いに Darboux 変換で移り合う極小曲面の組．

*4 この条件は f と f^* の主方向が一致することと同値である [5]．

して作用する．Hertrich-Jeromin [6] はその事実に注目し，一般の双等温曲面 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ に対し次のように Goursat 変換を定義した．$\boldsymbol{R}^3$ の Möbius 変換 μ に対し，$\tilde{f} := (\mu \circ f^*)^*$ を f の **Goursat 変換** と呼び，$G_\mu(f) := \tilde{f}$ と表す．

さて，ι を以下の $\boldsymbol{R}^3$ の Möbius 変換 $\iota(x) = -i - 2(i+x)^{-1}$ とする．ここで $x \in \boldsymbol{R}^3 = \operatorname{Im} \boldsymbol{H}$ として，四元数 $\boldsymbol{H} = \{x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k\}$ の積を用いている．このとき，ι の S^2 への制限 $\iota|_{S^2}$ は立体射影 $\sigma : S^2 \to \boldsymbol{C}j$ を与えることがわかる．リーマン面 M^2 上の正則関数 $g, h : M^2 \to \boldsymbol{C}$ に対し，$hj, (hj)^* = -jg$ は (退化した) Christoffel ペアを与える．このとき，Goursat 変換 $f := G_\iota(hj)$ は

$$\nu = \iota \circ (hj)^* = \frac{1}{1+|g|^2}\left((1-|g|^2)i - 2jg\right)$$

の Christoffel 変換であり，

$$df = 2\operatorname{Re}(g\omega)i + \operatorname{Re}((1-g^2)\omega)j + \operatorname{Im}((1+g^2)\omega)k$$

を積分することで得られる (ただし $\omega := (1/2)dh$ とした)．

2.3 Darboux 変換

曲面の組 $f, \hat{f} : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ は

- 各点 $p \in M^2$ に対し，$f(p)$ と $\hat{f}(p)$ において f と $\hat{f}$ に接するような 2 次元球面 $S(p)$ が存在する．
- f と $\hat{f}$ の型作用素は可換．
- f と $\hat{f}$ の第一基本形式は共形同値

を満たすとき，**Darboux ペア**と呼ぶ．与えられた双等温曲面 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ とパラメータ $t \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ に対し，$\hat{f} := D_t(f)$ が f の **Darboux 変換**であるとは，Riccati 方程式

$$d\hat{f} = t(\hat{f} - f)df^*(\hat{f} - f) \tag{2.1}$$

を満たすときをいう．

Christoffel 変換と Darboux 変換は可換であることが知られている．より正確には，与えられた双等温曲面 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ の Christoffel 変換 f^* と Darboux 変換 $\hat{f} = D_t(f)$ に対し，$\hat{f}^* := f^* + \frac{1}{t}(\hat{f} - f)^{-1}$ は $\hat{f}$ の Christoffel 変換であり，同時に f^* の D_t-変換を与える．これは **Bianchi の可換律定理** (Bianchi's permutability theorem) と呼ばれる．

3 主定理

定理 3.1 ([9, Theorem 1])**.** 双等温曲面 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ の *Darboux* 変換 $\hat{f} = D_t(f)$ と *Goursat* 変換 $\tilde{f} = G_\mu(f)$ に対して

$$G_\mu(\hat{f}) := G_\mu(f) + \frac{1}{t}\left(\mu \circ \hat{f}^* - \mu \circ f^*\right)^{-1} \tag{3.1}$$

により定まる曲面は，$\hat{f}$ の *Goursat* 変換かつ $\tilde{f}$ の *Darboux* 変換を与え，さらに以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
\mu(f^*) \arrow[rrr, leftrightarrow, "C"'] \arrow[ddd, leftrightarrow, "D_t"'] & & & G_\mu(f) \arrow[ddd, leftrightarrow, "D_t"] \\
& f^* \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[r, leftrightarrow, "C"] \arrow[d, leftrightarrow, "D_t"'] & f \arrow[ur, "G_\mu"'] \arrow[d, leftrightarrow, "D_t"] & \\
& \hat{f}^* \arrow[dl, "\mu"] \arrow[r, leftrightarrow, "C"'] & \hat{f} \arrow[dr, "G_\mu"] & \\
\mu(\hat{f}^*) \arrow[rrr, leftrightarrow, "C"] & & & G_\mu(\hat{f})
\end{tikzcd}
$$

前節で紹介したように，Weierstrass の表現公式は特別な Goursat 変換であるため，この可換律定理と Riccati 方程式 (2.1) を適用することにより，Weierstrass データの変換公式 (事実 1.1) を得る．Martínez-Roitman-Tenenblat [13] による事実 1.1 のオリジナルの証明では，双曲空間の平坦波面を用いる必要があったが，今回の我々が与えた証明は直接的である．さらに，$S^2 \times S^2$ の curved flat との対応 (cf. [3]) を考察することで，双曲空間の平坦波面と極小 Darboux ペアとの対応を単純に理解できることもわかる．

また，(3.1) の積は四元数のものを用いているが，Clifford 代数の積に置き換えても成立する．したがって，定理 3.1 は $\boldsymbol{R}^n$ の双等温曲面に対して成り立つ．

4 今回の手法の極大曲面への応用

ミンコフスキー空間 $\boldsymbol{L}^3$ の平均曲率が常に消える空間的曲面は**極大曲面**と呼ばれる．極大曲面と $\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面とは局所的な性質は類似しているが，大域的性質は異なり完備な極大曲面は平面に限ることが知られている (Calabi の定理 [4])．すなわち，平面でない極大曲面は特異点を持つが，特異点を許容した極大曲面には非自明な例が豊富に存在する．Umehara-Yamada [14] は特異点を持つ極大曲面として**極大面**を導入し，それらに対し完備性を定義し直すことで Osserman 型不等式などを導き極大面の大域的な性質を明らかにした．ここで，C^∞-写像 $f : M^2 \to \boldsymbol{L}^3$ に対し，$p \in M^2$ が**特異点**であるとは，f が p においてはめ込みでないときをいう．極大面は $\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面と同様に Weierstrass 型の表現公式を持つ [8, 14]．

講演者は Andreas Fuchs 氏 (ウィーン工科大学) との共同研究で極大曲面の間の Darboux 変換に対し，事実 1.1 と同様の Weierstrass データの変換公式を導くことができた．それを用いて極大面の間の Darboux 変換を定義し，Darboux 変換により得られる極大面の新たなエンドの挙動や，いくつかの特異点の型 (折り目特異点，錐状特異点，カスプ辺) が Darboux 変換で保たれることを示した．ツバメの尾，カスプ状交差帽子に対して同様の結果が成り立つかどうかは不明である．

参考文献

[1] F.E. Burstall, U. Hertrich-Jeromin, F. Pedit and U. Pinkall, *Curved flats and isothermic surfaces*, Math. Z. **225** (1997), 199–209.

[2] F.E. Burstall, J.F. Dorfmeister, K. Leschke and A.C. Quintino, *Darboux transforms and simple factor dressing of constant mean curvature surfaces*, Manuscripta Math. **140** (2013), 213–236.

[3] F.E. Burstall, U. Hertrich-Jeromin and W. Rossman, *Lie geometry of flat fronts in hyperbolic space*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (2010), 661–664.

[4] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 223–230.

[5] U. Hertrich-Jeromin, *Introduction to Möbius differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 300, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[6] U. Hertrich-Jeromin, *Supplement on curved flats in the space of point pairs and isothermic surfaces: a quaternionic calculus*, Doc. Math. **2** (1997), 335–350.

[7] U. Hertrich-Jeromin and F. Pedit, *Remarks on the Darboux transform of isothermic surfaces*, Doc. Math. **2** (1997), 313–333.

[8] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the* 3*-dimensional Minkowski space* L^3, Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.

[9] U. Hertrich-Jeromin and A. Honda, *Minimal Darboux transformations*, to appear in Beiträge zur Algebra und Geometrie, DOI: 10.1007/s13366-016-0301-y.

[10] J. Inoguchi and S. Kobayashi, *Characterizations of Bianchi-Bäcklund transformations of constant mean curvature surfaces*, Int. J. Math. **16** (2005), 101–110.

[11] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math. **216** (2004), 149–175.

[12] K. Leschke and K. Moriya, *Simple factor dressing and the Lopez-Ros deformation of minimal surfaces in Euclidean* 3*-space*, Preprint (2014), arXiv:1409.5286.

[13] A. Martínez, P. Roitman, and K. Tenenblat, *A connection between flat fronts in hyperbolic space and minimal surfaces in euclidean space*, Ann. Global Anal. Geom. **48** (2015), 233–254.

[14] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.