Real hypersurfaces in non-flat complex space forms and (para-)quaternionic geometry of complex 2-plane Grassmannian

木村真琴 (茨城大学) *

部分多様体論・湯沢 2016

概要

複素射影空間および複素双曲空間内の実超曲面に対して、複素 2-plane Grassmann 多様体への Gauss 写像を定義し、特に実超曲面が Hopf 超曲面の場合には、Gauss 写像の像が複素 2-plane Grassmann 多様体の (para-) 四元数 Kähler 構造に関して良い性質を持った部分多様体であることがわかる。このことは、非平坦複素空間形内の Hopf 超曲面の幾何学的特徴づけを与えている。また、複素 2-plane Grassmann 多様体の twistor 空間内の horizontal 部分多様体から、非平坦複素空間形内の Hopf 超曲面を構成できることがわかる。

1 実空間形内の超曲面の Gauss 写像

曲面や部分多様体を調べる上で **Gauss 写像**は基本的な概念であって、対象に応じて様々な Gauss 写像がある。Palmer [17] は、球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 内の向きつけられた超曲面 M^n の各点に対して、$\mathbb{R}^{n+2}$ における位置ベクトルと球面内の単位法ベクトルで張られる、$\mathbb{R}^{n+2}$ 内の oriented 2-plane を対応させることにより、M^n から実 Grassmann 多様体 $\widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ への Gauss 写像 g を考えた。 そして、$\widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ に定義される自然な Kähler 構造に関して、Gauss 写像の像 $g(M)$ は **Lagrange 部分多様体**であることを示した。特に M が等径 (すなわち、主曲率が一定)、あるいは austere の時、$g(M)$ は $\widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の**極小** Lagrange 部分多様体である。一方で、$\mathbb{S}^{n+1}$ 内の超曲面 M の**平行超曲面** M_r についても、Gauss 写像の像は変わらない: $g(M) = g(M_r)$。逆に、$\widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の Lagrange 部分多様体 Σ^n に対して、$\widetilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 上の S^1-束の全空間である Stiefel 多様体 $V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ への (局所的) Legendre immersion (lift) が構成できて、$\mathbb{S}^{n+1}$ への射影を合成すると、$\mathbb{S}^{n+1}$ の超曲面 (の平行族) が復元できる。実双曲空間 $\mathbb{H}^{n+1}$ や不定値実空間形内の超曲面についても、同様の研究が Anciaux [4] により成されている。

* This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP16K05119.

2　複素空間形内の Hopf 超曲面

M^{2n-1} を Kähler 多様体 $\widetilde{M}^n$ の実超曲面、N を M の (局所的に定義された) 単位法ベクトル場とする。M の接ベクトル場 $\xi := -JN$ (J は $\widetilde{M}$ の複素構造) が**主曲率ベクトル**、すなわち M^{2n-1} の shape operator A について $A\xi = \mu\xi$ が成り立つとき、M を $\widetilde{M}$ の **Hopf 超曲面**といい、μ を **Hopf 主曲率**という。以下 $\widetilde{M}$ として正則断面曲率 c が一定である、複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ ($c = 4$) または 複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ ($c = -4$) を考える。このとき、Hopf 主曲率 μ は (局所) 定数であることが知られている [14, 13]。

$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 M^{2n-1} の幾何学的意味付けは、まず Cecil-Ryan [6] に寄って与えられた: (1) 実超曲面 M^{2n-1} がある $\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体上半径一定 r ($0 < r < \pi/2$) の tube 上にあるとき、M は Hopf 超曲面 ($\mu = 2\cot 2r$) である。(2) 逆に、M^{2n-1} を $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面で、その Hopf 主曲率を $\mu = 2\cot 2r$ ($0 < r < \pi/2$) と表すことにする。このとき、もし M の各点に対して、$\mathbb{CP}^n$ の測地線に沿って、M の単位法ベクトル N 方向に距離 r だけ進んだ点を対応させる写像 $\phi_r : M \to \mathbb{CP}^n$ (**focal map** という) の**階数が一定**ならば、$\phi_r(M)$ は $\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体であって、M は $\phi_r(M)$ 上半径 r の tube 上にあることがわかる。(3) その後、focal map に関する条件なしで $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面の大域的構造の研究がある [5]。(4) $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 M の平行超曲面 M_r も Hopf である。(5) $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 M について、$\mu = 0$ の時 ξ の各積分曲線は $\mathbb{CP}^n$ の**測地線**であり、$\mu \neq 0$ の時は ξ の各積分曲線は $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1 (\subset \mathbb{CP}^n)$ の**小円**であって、M の平行超曲面の族 $\{M_r\}$ を考えると、ξ の積分曲線は $\mathbb{S}^2$ 内の**同心円**を成す。(6) ちなみに、$\mathbb{CP}^n$ の等質超曲面 [18] は階数 2 の Hermite 対称空間の isotropy 表現の軌道として得られるが、すべて Hopf である [19]。そして、$\mathbb{CP}^n$ の等質超曲面は、いくつかの第二基本形式が平行な複素部分多様体 [16] 上の半径一定の tube として実現される [10, 7]。

$\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面については、(1) $|\mu| > 2$ の場合、上記の Cecil-Ryan の結果と同様の構造定理が知られている [15]。(2) $|\mu| < 2$ の場合、$\mathbb{S}^{2n-1}$ 内の Legendre 部分多様体の pair から $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面が構成されることが示されている [9]。(3) $|\mu| = 2$ の場合の構造定理は知られていなかった。(4) $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面 M の平行超曲面 M_r も Hopf である。(5) $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面 M における、ξ の積分曲線 $\gamma = \gamma_\mu$ (μ は M の Hopf 主曲率) について: (5a) $\mu = 0$ の時 γ_0 は $\mathbb{CH}^n$ の**測地線**であり、(5b) $0 < |\mu| < 2$ の時は γ_μ は実双曲平面 $\mathbb{RH}^2 \cong \mathbb{CH}^1 (\subset \mathbb{CH}^n)$ 内の**測地線 γ_0 からの等距離曲線**である。(5c) $|\mu| = 2$ の時 γ_μ は $\mathbb{RH}^2 \cong \mathbb{CH}^1$ の **horocycle** であり、(5d) $|\mu| > 2$ の時、γ_μ は $\mathbb{RH}^2 \cong \mathbb{CH}^1$ の**測地円**であって、M の平行超曲面の族 $\{M_r\}$ を考えると、ξ の積分曲線は $\mathbb{RH}^2$ 内の**同心円**を成す。

3　複素空間形内の実超曲面の Gauss 写像

M^{2n-1} を $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面とする。このとき、§1 と同様に $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} の各点に対して、位置ベクトルと単位法ベクトルで張られる $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素 2-plane を対応させることによ

り、M^{2n-1} から複素 2-plane Grassmann 多様体 $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ への Gauss 写像 g を定義できる。

定理 1 [11]. M^{2n-1} を $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の実超曲面、$g : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ をその Gauss 写像とする。(1) M が**非 Hopf** のとき、g は **immersion** である。(2) M が **Hopf** のとき、像 $g(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の**四元数 Kähler 構造**に関して、**半分次元**の**全複素部分多様体** (cf. [2, 20]) である。特に、$\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の**任意の Hopf 超曲面** M^{2n-1} は、Kähler 多様体 $g(M)$ 上の $\mathbb{S}^1$-bundle の全空間であって、その射影 $M \to g(M)$ は Gauss 写像 g に他ならない。そして、g の各 fiber は Hopf 超曲面 M における ξ の積分曲線である。

定理 1 は、§1 の Palmer [17] の定理の複素版とも考えられる。

次に、M^{2n-1} を複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ の実超曲面とする。Anti de-Sitter 空間 $\mathbb{H}_1^{2n+1}(\subset \mathbb{C}_1^{n+1})$ は $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ 上の $\mathbb{S}^1$-bundle の全空間であることに注意して、M の各点に対して $\mathbb{C}_1^{n+1}$ の位置ベクトルから定まる timelike complex line と単位法ベクトルから定まる spacelike complex line によって張られる $\mathbb{C}_1^{n+1}$ の**不定値 2-plane** を対応させると、M から不定値複素 2-plane Grassmann 多様体 $\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ への **Gauss 写像** g が定義できる。

ここで、$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ 上定義される **para-四元数 Kähler 構造**について述べる。まず、Clifford 代数 $C(2,0) = C(1,1)$ として与えられる**分裂四元数** $\widetilde{\mathbb{H}}$ の要素は $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$, $i^2 = -1$, $j^2 = k^2 = 1$, $ij = -ji = -k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = -j$ $(q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R})$ と表されて、その (不定値) ノルムは $|q|^2 = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$ で与えられる。このとき、四元数の関係式を用いて四元数 Kähler 構造が定義されたのと同様にして、**para-四元数 Kähler 構造**が定義される (cf. [1])。ただし、このとき自然に定まる計量は正定値ではなくて **neutral 計量**であることに注意する。

定理 2 [8]. M^{2n-1} を $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ の実超曲面、$g : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ をその Gauss 写像とする。(1) M が**非 Hopf** のとき、g は **immersion** である。(2) M が **Hopf** のとき、像 $g(M)$ は $\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ の**半分次元**の部分多様体であって、その誘導計量の符号は、M の ξ と直交する方向の主曲率から定まる。(3) 特に M が Hopf で $|\mu| > 2$ (resp. $|\mu| < 2$) であって、$g(M)$ の $\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ からの誘導計量が**非退化**のとき、$g(M)$ は **pseudo-Kähler** (resp. **para-Kähler**) である。

定理 2 は、§1 の Anciaux [4] の (実双曲空間内の超曲面に関する) 定理の複素版とも考えられる。

4 複素 2-plane Grassmann 多様体の twistor 空間

四元数 Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ において、その四元数 Kähler 構造を与える概複素構造全体の空間を $\mathcal{Z}$ とすると、$\widetilde{M}$ 上の $\mathbb{S}^2$-bundle となる。$\mathcal{Z}$ を $\widetilde{M}$ の **twistor 空間**という。特に、$\widetilde{M}$ の Ricci 曲率が正のとき、$\mathcal{Z}$ は**複素接触構造**と **Einstein-Kähler 計量**を許容する。このとき、Twistor fibration $\mathcal{Z} \to \widetilde{M}$ は Riemann submersion であって、各 fiber は全測地的である。複素 2-plane Grassmann 多様体 $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ は Tsukada [20] がその構造を決定し、等質空間としては $U(n+1)/U(n-1) \times U(1) \times U(1)$ と表示され、特に Kähler C-space である。一方で、この $\mathcal{Z}$ は $\mathbb{CP}^n$ 内の**向きつけられた測地線全体の空間**、あるいは $\mathbb{CP}^n$ 内の全測地的複素射影直線 $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ 内の**同心円全体の空間**と見なすことができる [12]。この twistor 空間 $\mathcal{Z}$ を用いて、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の全複素部分多様体 Σ^{n-1} から $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面を**逆構成**できる: Σ を twistor fibration $\mathcal{Z} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ に関して horizontal lift することができて、その像 $\widetilde{\Sigma}$ は $\mathcal{Z}$ の **Legendre 部分多様体**である [3]。このとき、twistor 空間 $\mathcal{Z}$ 上の $\mathbb{S}^1$-bundle E で、各 fiber が $\mathbb{CP}^n$ の測地線となるものが取れて、$\widetilde{\Sigma}$ 上の E の pull-back bundle M^{2n-1} から $\mathbb{CP}^n$ への写像 Φ が自然に構成できる。一般には Φ は特異点を持つが、immersion の場合 $\Phi(M)$ は $\mathbb{CP}^n$ の **Hopf 超曲面** で $A\xi = 0$ をみたし、一般の Hopf 超曲面は $\Phi(M)$ の**平行超曲面**として実現できる。ちなみに、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 M の各点に対して、その点を通る ξ の積分曲線を対応させることにより、M から $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ への写像ができて、その像は $\mathcal{Z}$ の **Legendre 部分多様体**である [12]。

Para-四元数 Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ については、3 つの型の **twistor 空間**が定義できる [1]: $\mathcal{Z}_- = \{I | I^2 = -1\}$, $\mathcal{Z}_+ = \{I | I^2 = 1\}$, $\mathcal{Z}_0 = \{I | I^2 = 0, I \neq 0\}$. 特に、$\widetilde{M} = \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ の場合、$\mathcal{Z}_-$, $\mathcal{Z}_+$, $\mathcal{Z}_0$ はそれぞれ、$\mathbb{CH}^n$ 内の **同心円**, **測地線**とその $\mathbb{CH}^1$ における等距離曲線、および **horocycle** 全体の空間と同一視できる。そして、それぞれの twistor 空間内の $2n-2$ 次元で、$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ への fibration について **horizontal** な部分多様体 $\widetilde{\Sigma}$ に対して、上記と同様な方法で $\mathbb{CH}^n$ 内の Hopf 超曲面で、それぞれ $|\mu| > 2$, $|\mu| < 2$, $|\mu| = 2$ をみたすものが構成できる (準備中)。

さらに、$\mathbb{CP}^n$ 内の測地線で foliate された **ruled Lagrange 部分多様体** M^n も、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ 内の **horizontal** 部分多様体 Σ^{n-1} でしかるべき条件を満たすものから構成できることがわかる (準備中)。

参考文献

[1] D. V. Alekseevsky and V. Cortés, *The twistor spaces of a para-quaternionic Kähler manifolds*, Osaka J. Math. **45** (2008), no. 1, 215–251.

[2] D. V. Alekseevsky and S. Marchiafava, *Hermitian and Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Osaka J. Math. **38** (2001), no. 4, 869–904.

[3] D. V. Alekseevsky and S. Marchiafava, *A twistor construction of Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Ann. Mat. Pura Appl. **184** (2005), no. 1, 53–74.

[4] H. Anciaux, *Space of geodesics of pseudo-Riemannian space forms and normal congruences of hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 5, 2699–2718.

[5] A. A. Borisenko, *On the global structure of Hopf hypersurfaces in a complex space form*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 1, 265–277.

[6] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982), no. 2, 481–499.

[7] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Geometry of hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Newyork, 2015.

[8] J. T. Cho and M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex hyperbolic space and submanifolds in indefinite complex 2-plane Grassmannian I*, Topology Appl., **196** (2015), part B, 594–607.

[9] T. E. Ivey, *A d'Alembert formula for Hopf hypersurfaces*, Results Math. **60** (2011), no. 1-4, 293–309.

[10] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc., **296** (1986), 137–149.

[11] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex* 2*-plane Grassmannians I*, Diff. Geom. Appl. **35**, (2014) suppl., 266–273.

[12] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex* 2*-plane Grassmannians II*, Diff. Geom. Appl., to appear.

[13] U.-H. Ki and Y. J. Suh, *On real hypersurfaces of a complex space form*, Math. J. Okayama Univ. **32** (1990), 207–221.

[14] Y. Maeda, *On real hypersurfaces of a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 529–540.

[15] S. Montiel, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), no. 3, 515–535.

[16] H. Nakagawa and R. Takagi, *On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), no. 4, 638–667.

[17] B. Palmer, *Hamiltonian minimality and Hamiltonian stability of Gauss maps*, Diff. Geom. Appl. **7** (1997), no. 1, 51–58.

[18] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. **10** (1973), 495–506.

[19] R. Takagi, *Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), no. 1, 43–53.

[20] K. Tsukada, *Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes*, Diff. Geom. Appl. **44** (2016), 30–51.

Makoto Kimura

Department of Mathematics, Faculty of Science, Ibaraki University,

Mito, Ibaraki 310-8512, JAPAN

E-mail: makoto.kimura.geometry@vc.ibaraki.ac.jp