Hermite 対称空間の大対蹠集合における幾何と解析

奥田隆幸 (広島大学大学院理学研究科) *
(栗原大武氏 (北九州工業高等専門学校) との共同研究に基づく)

Abstract

本稿ではコンパクト型既約エルミート対称空間 M の大対蹠集合 S について, S を頂点とする距離推移的なグラフの構造を定義し, またそのグラフの直径および最小固有値がそれぞれ M のランク, M の自己同型群のランクと一致することを紹介する.

1 Introduction

対称空間 M について, 各点 $x \in M$ における点対称を $s_x : M \to M$ とし, M の自己同型群を G と書くことにする (対称空間の定義や基礎知識については [3] を参照されたい), M の部分集合 A が対蹠集合 (antipodal set) であるとは, 任意の $x, y \in A$ について $s_x(y) = y$ を満たすこととする. M がコンパクト対称空間の場合には, 対蹠集合は必ず有限集合であり, さらにその濃度は M のみに依存するある定数で抑えられることが知られている. すなわち

$$\#_2 M := \max\{\# A \mid A \text{ は } M \text{ 内の対蹠集合 }\} < \infty$$

となる (証明は例えば [6, Section 2]). この $\#_2 M$ をコンパクト対称空間 M の 2-number といい, $\# A = \#_2 M$ となる M 内の対蹠集合を大対蹠集合 (great antipodal set) という.

対蹠集合や 2-number の概念は Chen–長野 [2] によって定義され, これまでに [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] などで多くの研究がなされてきた. 特に M として対称 R-空間を考えた場合には, M の 2-number や大対蹠集合は以下のような著しい性質をもつことが知られている:

*okudatak@hiroshima-u.ac.jp

Fact 1.1. M を対称 R-空間とし, G を M の対称空間としての自己同型群とする. このとき以下が成り立つ:

(i: 竹内 [5]) $H_k(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を M の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数 k-ホモロジー群とし, $H_*(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k\geq 0} H_k(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とすると,

$$\#_2 M = \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_*(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

特に M がコンパクト型エルミート対称空間の場合は

$$\#_2 M = \chi(M).$$

ただし $\chi(M)$ は M のオイラー数とする (*Chen–長野 [2, Section 4]*).

(ii: Sánchez [4], 田中–田崎 [7]) M 内の大対蹠集合は G_0-共役を除いて一意である. ただし G_0 は G の単位連結成分とする.

Remark 1.2. 一般にコンパクト対称空間 M に G-不変なリーマン計量を定めた場合には G は M の等長変換群となる. 特に G の単位連結成分 G_0 は等長変換群の単位連結成分と一致する (コンパクト対称空間上のリーマン計量については [*3*] を参照されたい).

Fact 1.1 (i) は, 「全空間として対称 R 空間を考えたとき, 大対蹠集合の濃度が全空間の位相的な不変量である $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群の次元と一致する」ということを主張している. 本稿では全空間として対称 R 空間の一種であるコンパクト型既約エルミート対称空間 M を考え, M 内の大対蹠集合を頂点集合とする単純グラフを定義し, そのグラフのある幾何学的不変量と調和解析的不変量が全空間 M の微分幾何的な不変量と対応することを紹介する.

2 Distance-transitive graphs

本節では主結果を述べるために必要なグラフ理論の概念として, グラフの直径, 最小固有値, 距離推移性の定義を紹介する. 本稿の内容と深く関係するグラフ理論の教科書として [1] を挙げておく.

以下, 有限単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ について考える. すなわち V は有限集合であり, E は $\binom{V}{2}$ の部分集合である. ただし $\binom{V}{2}$ は有限集合 V の 2 点部分集合全体のなす族とする.

有限単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ の頂点集合 V 上に, “Γ 上の二頂点を繋ぐ最短経路の長さ” によって定義される距離 $d_\Gamma : V \times V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を Γ 上のグラフ

距離と呼ぶ. 有限単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ の直径 $\operatorname{diam}\Gamma$ を距離空間 (V, d_Γ) の直径, すなわち

$$\operatorname{diam}\Gamma := \max\{d_\Gamma(a, b) \mid a, b \in V \text{ with } a \neq b\}$$

と定める. また距離空間 (V, d_Γ) の等長変換群を $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ (グラフの自己同型群) と書くことにする.

有限単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ について, V 上の複素数値関数全体のなすベクトル空間を $\mathbb{C}^V$ とし, Γ のグラフラプラシアン $\Delta_\Gamma \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^V)$ を, 各 $\phi \in \mathbb{C}^V$ に対して

$$(\Delta_\Gamma \phi)(a) := \sum_{b \in V : \{a, b\} \in E} \phi(a) - \phi(b) \quad \text{for each } a \in V$$

とすることにより定義する. グラフラプラシアン Δ_Γ は半正定値な自己共役作用素であり, 固有値はすべて非負実数となる. 特に辺集合 E が空集合でないとき Δ_Γ は正の固有値を一つ以上持つ. Δ_Γ の正の固有値の中で最小なものを Γ の最小固有値といい, その重複度を本稿では $m_1(\Gamma)$ と書くことにする.

また有限単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ が距離推移的であるとは, $d_\Gamma(a_1, b_1) = d_\Gamma(a_2, b_2)$ となる各 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in V$ について, $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ であって $g \cdot a_1 = a_2$ かつ $g \cdot b_1 = b_2$ となるものが存在することとする.

3 Main results

以降 M をコンパクト型既約エルミート対称空間とし, M 内の大対蹠集合 S を一つ選んで固定する. コンパクト型エルミート対称空間は対称 R-空間であることから Fact 1.1 が適用でき, M 内の大対蹠集合は共役を除いて一意であることに注意しておく.

M 上の $\mathrm{Aut}(M)$-不変なリーマン計量を一つ選んで固定し, その計量の定める距離を $d_M : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする. M 内の大対蹠集合 S について, S の d_M についての最小距離 d_S を

$$d_{\min}(S) := \min\{d_M(x, y) \mid x, y \in S \text{ with } x \neq y\}$$

と定義し, $\binom{S}{2}$ (S の二点部分集合全体のなす族) の部分集合 E_S を

$$E_S := \{\{x, y\} \in \binom{S}{2} \mid d_M(x, y) = d_{\min}(S)\}$$

と定義する. ここで M 上の $\mathrm{Aut}(M)$-不変リーマン計量は定数倍を除いて一意であることから, $E_S \subset \binom{S}{2}$ は計量の選び方に依らないことが分かる (最小距離 $d_{\min}(S)$ は計量に依存する). 大対蹠集合 S を頂点集合, E_S を辺集合とみなせば, 有限単純グラフ $\Gamma(S) := (S, E_S)$ が定義される.

本稿の主結果は以下のものである:

Theorem 3.1. *M をコンパクト型既約エルミート対称空間とし, G を M の対称空間としての自己同型群とする. また S を M 内の大対蹠集合とし, 有限単純グラフ $\Gamma(S)$ を上記のように定める. このとき以下が成り立つ:*

(1) グラフ $\Gamma(S)$ は距離推移的である.

(2) グラフ Γ の直径 $\operatorname{diam}\Gamma(S)$ は $\operatorname{rank} M$ と一致する.

(3) グラフ $\Gamma(S)$ の最小固有値の重複度 $m_1(\Gamma(S))$ は $\operatorname{rank} G$ と一致する.

さらに, 各コンパクト型既約エルミート対称空間 M について, その大対蹠集合 S から得られるグラフ $\Gamma(S)$ (*Fact* 1.1 より大対蹠集合を取り換えてもグラフとして同型である) は以下の表のようになる.

Label	$M = G/K$	$\Gamma(S)$
AIII	$SU(n)/(S(U(k) \times U(n-k)))$	Johnson graph $J(n,k)$
BDI	$SO(n)/(SO(2) \times SO(n-2))$	Complete multipartite graph $K_{\ell\times 2}$ ($\ell := \lfloor n/2 \rfloor$)
CI	$Sp(n)/U(n)$	Hamming graph $H(n,2)$
DIII	$SO(2n)/U(n)$	Halved graph $\frac{1}{2}H(n,2)$ of $H(n,2)$
EIII	$E_6/(SO(10) \times SO(2))$	Schläfli graph
EVII	$E_7/(E_6 \times SO(2))$	Gosset graph

各距離推移的グラフの定義については [1] を参照されたい. また各不変量については以下の通りである.

$M = G/K$	$\#S = \chi(M)$	$\operatorname{diam}\Gamma(S) = \operatorname{rank} M$	$m_1(\Gamma(S)) = \operatorname{rank} G$
$SU(n)/(S(U(k) \times U(n-k)))$	$\binom{n}{k}$	k	$n-1$
$SO(n)/(SO(2) \times SO(n-2))$	$2\lfloor n/2 \rfloor$	2	$\lfloor n/2 \rfloor$
$Sp(n)/U(n)$	2^n	n	n
$SO(2n)/U(n)$	2^{n-1}	$\lfloor n/2 \rfloor$	n
$E_6/(SO(10) \times SO(2))$	27	2	6
$E_7/(E_6 \times SO(2))$	56	3	7

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen and A. Neumaier. *Distance-regular graphs*, volume 18 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano. *A Riemannian Geometric Invariant and its Applications to a Problem of Borel and Serre*. Trans. Amer. Math. Soc., **308**:273–297, 1988.

[3] 長野正. 対称空間の幾何理論. 数理解析研究所講究録, **1206**:55–82, 2001.

[4] C.U. Sánchez. *The index number of an R-space: an extension of a result of M. Takeuchi's*. Proc. Amer. Math. Soc., **125**:893–900, 1997.

[5] M. Takeuchi. *Two-number of symmetric R-spaces*. Nagoya Math. J., **115**:43–46, 1989.

[6] M.S. Tanaka and H. Tasaki. *The intersections of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*. J. Math. Soc. Japan, **64**:1297–1332, 2012.

[7] M.S. Tanaka and H. Tasaki. *Antipodal sets of symmetric R-spaces*. Osaka J. Math, **50**:161–169, 2013.

[8] H. Tasaki. *Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds*. Internat. J. Math. **24**:1350061-1-28, 2013.

[9] H. Tasaki. *Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **106**, Y.J. Suh et al. (eds.), ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds":515–524, 2014.

[10] H. Tasaki. *Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds*. "Global Analysis and Differential Geometry on Manifolds" (special issue: the Kobayashi memorial volume), Internat. J. Math. **26**:1541008-1-12, 2015.