

3次元時空の極大曲面の型変化と小林曲面

梅原雅顕 (東工大・情報理工学院)

1. 時空の空間的極大曲面

M^2 を Riemann 面とし, g を M^2 上の有理形関数, ω を M^2 上の正則 1 次微分形式として, その 2 つが M^2 の各点で正值条件

$$(1.1) \quad (1 + |g|^2)|\omega| > 0$$

を満たしているとき, 対 (g, ω) を Weierstrass データとよぶ. この状況で

$$(1.2) \quad f_0 := \operatorname{Re}(F_0), \quad F_0 := \int_{z_0}^z (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega$$

で与えられる f_0 が M^2 上で一価であれば, 3次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 への共形極小はめ込みを与えることは「Weierstrass 表現公式」として知られているが, 少し順番を入れ替えて (1.1) を満たし

$$(1.3) \quad f := \operatorname{Re}(F), \quad F := \int_{z_0}^z (1 + g^2, i(1 - g^2), -2g)\omega$$

によって与えられる f が M^2 上で一価であれば, これは符号数 $(+ + -)$ の時空 \mathbf{R}_1^3 の (空間的) 極大曲面を与える. この公式を用いた (特異点もこめた) 極大曲面の研究は小林治 [13], [14] に始まる. 第一基本形式は

$$ds^2 = (1 - |g|^2)^2 |\omega|^2$$

となるので $|g| = 1$ となる点が曲面の特異点となる. (f がはめ込み (immersion) でない点を特異点という.) このようにして得られる極大曲面は以下の性質で特徴づけられる:

- (1) M^2 の開かつ稠密な部分集合 W が存在し, 制限写像 $f|_W$ は平均曲率零の空間的共形はめ込み (space-like conformal immersion) を定める,
- (2) f の特異点で $df(p)$ は零にならない, つまり f は分岐点を持たない,
- (3) g は, f のガウス写像と同一視される (ただし g は, \mathbf{R}_1^3 内の 2 葉双曲面を理想境界で貼り合わせてできる球面 $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ への写像と考える.)

このような f を極大面 (maxface) と我々は名付けた ([16]). 極大面に対して, 第一基本形式を少し改変した計量

$$ds_{\#}^2 := (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2$$

が M^2 上の完備なりーマン計量となると, 弱完備であるという.

2. 特異点の双対性と折り目特異点

極大曲面は, Euclid 空間の極小曲面と異なり, 一般に多くの特異点をもつ. 極大曲面に現れる代表的な特異点である「カスプ辺, ツバメの尾, カスプ状交叉帽子」について文献 [9] を参照せよ. ここでは「折り目特異点」に注目する: 2次元の領域 U から 3次元への C^∞ -写像芽 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ は, 定義域と値域の座標変換で, 写像 $(u, v) \mapsto (u, v^2, 0)$ に一致させることができるときに折り目特異点であるという. 極大曲面 f は, 正則はめ込み F の実部であるが, 虚部

$$f^* := \operatorname{Im}(F)$$

を共役極大曲面という. f が M^2 上で一価であっても f^* はそうとは限らない. 定義域を \mathbf{C} の単連結領域にしておけば, 共役曲面の一価性は保存される. このとき, 2つの曲面の特異点の間には以下の双対性がある.

- (0) $p \in M^2$ が f の特異点であることと f^* の特異点であることは同値.
- (i) $p \in M^2$ が f のカスプ辺なら f^* も p でカスプ辺となる ([9]).
- (ii) $p \in M^2$ が f のツバメの尾 (カスプ状交叉帽子) なら f^* は p でカスプ状交叉帽子 (ツバメの尾) となる ([9]).
- (iii) $p \in M^2$ が f の円錐的特異点 (折り目特異点) なら f^* は p で折り目特異点 (円錐的特異点) となる ([4]).

上記の双対性に関連して高橋英伸氏 [15] (修士論文) による時間的平均曲率零曲面に対する類似が得られている。最近、空間的平均曲率一定曲面についての同様の双対性が、本田氏 [11] により示されている。また、緒方氏・寺本氏の共同研究で、その他の特異点についても同様の双対性が調べられている。

事実 2.1 ([10, 12, 4]). 極大曲面の折り目特異点からなる空間曲線は、速度ベクトルが光的となる変曲点を持たない時空の正則曲線となり、この曲線を越えて、時間的曲面へ平均曲率零曲面としての実解析的延長を有する。

実際、折り目特異点の像は、 \mathbf{R}_1^3 における光的な空間正則曲線となり、曲線上の2点の midpoint の軌跡が、その時間的延長部分となる。

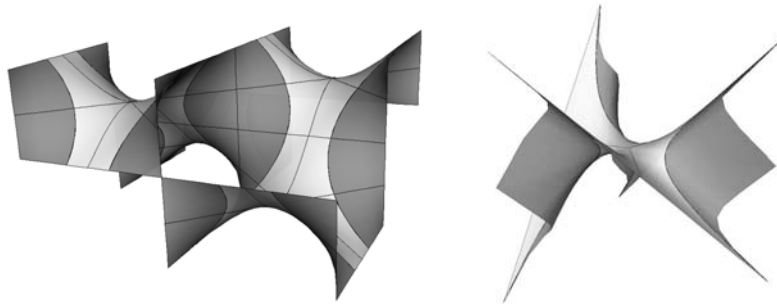


図 1. 極大 Schwarz D 曲面と極大 Jorge-Meeks 型曲面の解析的延長

不思議なことなのだが、折り目特異点に沿って、空間的極大曲面の具体例を時間的曲面へ解析的に延長してみると、多くの場合とてもよい形状をしている。たとえば、楕円カテナイド $(g, \omega) = (z, dz^2/z^2)$ の共役曲面である極大ヘリコイドは折り目特異点をもち、その解析的延長は極小曲面としてのヘリコイドに一致する。 (t, x, y) を \mathbf{R}_1^3 の標準座標系として、その他の例をあげると：

- (a) 小林治氏 [13] による時空における平均曲率が零の entire graph の以下の2つの例 (図 3)
- $$(2.1) \quad t_0(x, y) := x \tanh 2y, \quad t_1(x, y) := \log(\cosh x / \cosh y).$$

- (b) Schwarz D 型の3重周期的な極大曲面は、折り目特異点のみをもち、その解析的延長は3重周期的な固有埋め込みである ([8], 図 1 左)。
 (c) Jorge-Meeks 型の極大曲面 J_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) は、Weierstrass データ

$$(g, \omega) := (z^{n-1}, idz/(z^n - 1)^2)$$

に対応する極大曲面であり、折り目特異点のみをもち、その解析的延長は固有埋め込みとなる ([7], 図 1 右)。 J_2 は上記の小林氏の発見した曲面 t_0 に一致する。

特に、小林氏の発見した2つの entire graph の例 (図 3 の左と中央) は極小曲面の Bernstein の定理の主張とは大きく異なり、時空では線形でない平均曲率零の entire graph の例が存在することになるので興味深い。ただし、時空において

$$t(x, y) = x + \mu(y) \quad (\mu'(y) > 0, x, y \in \mathbf{R})$$

は、時間的で平均曲率が零となる entire graph の例を与えるので、空間的部分を含む例として小林氏の例は価値がある。ちなみに、空間的極大曲面だけからなる entire graph が平面に限ることは Calabi [2] の古典的な結果である。

3. 極大曲面の第二表現公式と小林氏の第一論文で紹介された例

小林治氏は、極大曲面の特異点に着目して、合計2本の論文 [13, 14] を執筆した。その第一論文 [13] では、(3.1) だけでなくもう一つの表現公式

$$(3.1) \quad \hat{f} := \operatorname{Re}(F), \quad F := \int_{z_0}^z \left(1 + g^2, 2ig, -(1 - g^2) \right) \omega$$

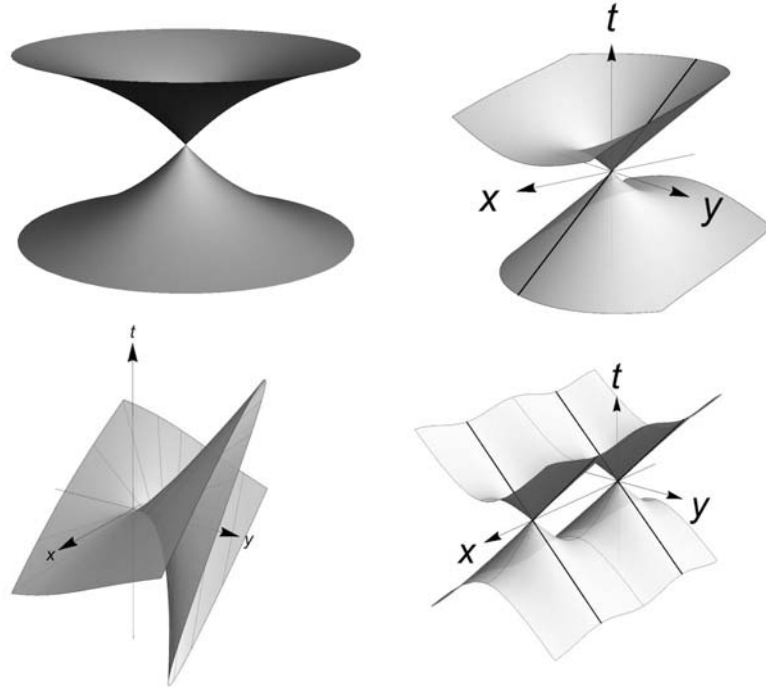


図 2. 楕円カテナイド (左上), 放物カテナイド (右上) そして $(0, 0, 0, 0)$ 型小林曲面 (左下) と双曲カテナイド (右下)

が与えられている．これは，最初の表現公式 (3.1) に

$$\hat{g} = \frac{g-1}{g+1} = \frac{(\cos 45^\circ)g - (\sin 45^\circ)}{(\sin 45^\circ)g + (\cos 45^\circ)}, \quad \hat{\omega} := \frac{\omega(1+g)^2}{2}$$

で定まる Weierstrass データ $(\hat{g}, \hat{\omega})$ を代入したものと同一である．Euclid 空間の極小曲面の場合には，このような (g, ω) の変換は同じ曲面しか生み出さないが，極大曲面の場合には，1つの (g, ω) から

$$f \text{ とその共役 } f^*, \quad \hat{f} \text{ とその共役 } \hat{f}^*$$

の合計 4 つの極大曲面が得られる．小林氏は，極大 Enneper 曲面 $((g, \omega) = (z, dz))$ と楕円カテナイド $((g, \omega) = (z, dz^2/z^2))$ とその第二曲面それぞれの共役を考えて，4 組ずつ合計 8 個の極大曲面を作った．Enneper 型の極大曲面の共役曲面は元の曲面と合同なので，実は，合計 7 個の曲面が得られたのだが，極大ヘリコイド以外で折り目特異点をもつのは，以下の 2 つである，

- 放物カテナイド (図 2 右上) は極大 Enneper 曲面の第二曲面である．その共役曲面は線織面 (図 2 左下) は後で述べる $(0, 0, 0, 0)$ 型的小林曲面になっている．
- 楕円カテナイド (図 2 左上) の第二曲面の共役曲面は先に紹介した平均曲率が零の entire graph $t_0 (= J_2)$ (図 3 中央) であり，後で述べる $(0, 0, \pi, \pi)$ 型的小林曲面になっている．

小林氏はさらに，先に紹介した Scherk 型の entire graph t_1 (図 3 左) も例に加えているが，これは後で述べる $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2)$ 型的小林曲面になっている．したがって小林氏の第一論文の具体例のうち，3 つの例が次節で定義する小林曲面になっている．

4. 小林曲面の定義と性質

筆者等 (藤森-川上-國分-ラスマン-山田-梅原) は最近，前節で紹介した小林氏の 3 つの例を含む解析的延長をもつ極大曲面のクラスを発見したので，ここでその共同研究 [5] の内容を紹介する．

$$(4.1) \quad 0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{2n-1} < 2\pi$$

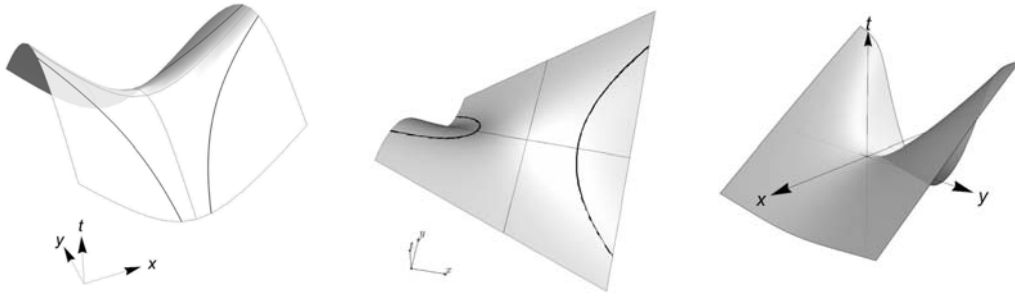


図 3. $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2)$ と $(0, 0, \pi, \pi)$ および $(0, 0, 0, \pi)$ に対応する小林曲面

を $(2n-1)$ 個の実数の組とし, b_1, \dots, b_{n-1} を複素数の組で重複を許すものとする. さらに

$$(4.2) \quad |b_1|, \dots, |b_{n-1}| < 1$$

とし

$$(4.3) \quad g = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - b_k}{1 - \bar{b}_k z}, \quad \omega = \frac{i \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \bar{b}_k z)^2}{\prod_{j=0}^{2n-1} (e^{-i\alpha_j/2} z - e^{i\alpha_j/2})} dz$$

とおく. いま $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}\}$ の中で相異なるものの数を N とし,

$$\{e^{i\alpha_0}, \dots, e^{i\alpha_{2n-1}}\}$$

の中で相異なるものを $\{p_1, \dots, p_N\}$ で表すと, 上記 (g, ω) は $M^2 := \mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$ において

$$f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}_1^3$$

なる極大面を誘導し, 単位円 $|z| = 1$ と M^2 の共通部分が, f の折り目特異点に対応し, それ以外の場所には特異点は存在しない. 我々は, このような f を小林曲面と名付けた (cf. [5]). その理由は $n = 2$ で $b_1 = 0$ かつ

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := (0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2})$$

の場合の解析的延長が先に紹介した $t_1 = \log(\cosh x / \cosh y)$ を与え (図 3 左),

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := (0, 0, \pi, \pi)$$

の場合の解析的延長が $t_0 = x \tanh 2y$ を与えるからである (図 3 右). 極大ヘリコイドはしかし, 小林曲面にならない. これは, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で一価にならないためである. 一方, 上述の Jorge-Meeks 型の極大曲面 J_n は, 自然数 $n (\geq 3)$ について $b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ とし

$$(4.4) \quad \alpha_{2j} = \alpha_{2j+1} := \frac{2\pi j}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

によって得られる小林曲面である, 但し $\alpha_{2n} = 0$ とする (この場合, 解析的延長は entire graph にはならないが埋め込みとなる [7]). 今回, 小林曲面について, 以下のような結果を示すことができた.

定理 4.1 ([5]). $n \geq 2$ とせよ. 複素数 b_1, \dots, b_{n-1} が十分に小さく, かつ

$$(4.5) \quad |\alpha_j - \alpha_{j+1}| < \frac{\pi}{n-1} \quad (j = 0, \dots, 2n-1),$$

を満たせば, 対応する小林曲面の解析的延長は, 平均曲率が零の entire graph の像として表せる.

定理の証明は, この曲面の延長の射影が微分同相写像で固有写像 (proper mapping) を定めていることを示すことにより達成されるが, それを示すには, いろいろな技巧が必要である. 結果的に $n (\geq 3)$ については, entire graph を与える小林曲面は非自明な (つまり \mathbf{R}_1^3 の合同変換と拡大縮小を除いて) $4n-7$ 個の変形の自由度をもつ. 定理の主張は, b_1, \dots, b_{n-1} が大きいときは成り立たない. そのような例は $n = 4$ のときに存在する.

特に n の値が最も小さい $n = 2$ のとき、曲面の自由度は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の 3 変数に思えるが単位円を固定するメビウス変換があるので実際の自由度は 2 である。小林氏の発見した 3 つの曲面はその中でも特に対称性が高い例であるが、もう一つ ($b_1 = 0$ で)

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := (0, 0, 0, \pi)$$

の場合も entire graph を定める (図 3 右)。この例は我々とは独立に赤嶺氏 [1] も発見し、詳しい性質が調べられている。 $n = 2$ のときには特別に以下の定理が成り立つ。

定理 4.2 ([5]). もしも $n = 2$ とすると、角度の条件によらず、対応する小林曲面の解析的延長はすべて固有埋め込みとなる (4 つの角度は重複があってもよい。)

$n \geq 3$ のとき、「いつ小林曲面が埋め込みになるか」は現段階で詳細は不明である。ある程度の必要条件はわかっている。詳しくは [5] を参照されたい。

5. \mathbb{R}_1^3 -カテナイドの分類

3次元 Euclid 空間の極小曲面として有名なカテナイドは以下の 2 つの性質をもつ：

(G) \mathbb{R}^3 の回転面である、

(A) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で定義され、ガウス写像の写像度が 1 で Hopf 微分 (第二基本形式を複素化して $(2, 0)$ -part をとった正則 2 次微分形式) が 2 位の極を $0, \infty$ でもつ。

最初の性質をカテナイドの幾何的性質とよび後者の性質をカテナイドの解析的性質とよぶ。

3次元時空 \mathbb{R}_1^3 において、固定点集合が直線であるような 1 係数等長変換で不変な極大曲面として、小林が発見した「楕円カテナイド」(図 2 左上)、「放物カテナイド」(図 2 右上)、「双曲カテナイド」(図 2 右下)がある。これらは、極大曲面の「幾何学的な性質」からみたカテナイドの一般化になっている。それでは「解析的性質」からみたカテナイドの一般化はどうなるであろうか。今回、筆者等の共同研究で以下の結果が得られた：

定理 5.1 ([6]). \mathbb{R}_1^3 の弱完備な極大曲面で、 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で定義され、ガウス写像の写像度が 1 で Hopf 微分 (第二基本形式を複素化して $(2, 0)$ -部分をとった正則 2 次微分形式) が 2 位の極を $0, \infty$ でもつものは、楕円カテナイド (図 2 左上) か、あるいは $(0, 0, \pi, \pi)$ 型の小林曲面 (図 3 中央) に限る。

湯沢の発表時は、上の分類よりもっと多くの例がある、と勘違いをしていたのですが、講演後に、上記の 2 つだけが「解析的カテナイド」であることが判明したので、訂正して最新の結果として紹介しておきます。現在、筆者等は、3次元 de Sitter 時空の平均曲率 1 の「解析的性質」からみたカテナイドの一般化の解析的延長問題に取り組んでいるが、極大曲面のカテナイドよりも遙かに多くのバリエーションがありまだ完全な結論に到達していない。

なお、ここで使用した絵は、大部分、岡山大学の藤森氏が作成したものです。

参考文献

- [1] S. Akamine, *Causal characters of zero mean curvature surfaces of Riemann-type in the Lorentz-Minkowski 3-space*, preprint.
- [2] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math. **15** (1970), 223–230.
- [3] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, Osaka J. Math. **52** (2015), 285–297.
- [4] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173–200.
- [5] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Entire zero-mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space* Quarterly J. Math. **67** (2016), 801–837.
- [6] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, S. D. Yang, *Extensions of the images of analytic maps, and an application to space-like catenoids*, in preparation.
- [7] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, to appear in Osaka J. Math., (arXiv:1509.05853).
- [8] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Michigan Math. J. **63** (2014), 189–207.

- [9] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [10] C. Gu, *The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, Acta. Math. Sinica. **1** (1985), 173–180.
- [11] A. Honda, *Duality of singularities for spacelike CMC surfaces*, to appear in Kobe Journal of Mathematics.
- [12] V. A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izvestiya Math. **67** (2003), 209–224.
- [13] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space \mathbb{L}^3* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.
- [14] O. Kobayashi, *Maximal surfaces with conelike singularities*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 609–617.
- [15] H. Takahashi, *Timelike minimal surfaces with singularities in three-dimensional spacetime* (Japanese), Master thesis, Osaka University, (2012).
- [16] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.