特異点を持つ時間的極小曲面のガウス曲率について

赤嶺　新太郎　(九州大学大学院数理学府)*

概　　要

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の時間的曲面は，ローレンツ計量を持つため，曲面の主曲率が実数になるとは限らないという性質がある．本稿では，時間的極小曲面上の特異点と主曲率との間に成り立つ関係をプレプリント [1] に基いて報告する．

1. 序

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle , \rangle = -dt^2 + dx^2 + dy^2)$ 内の時間的曲面とは，$\mathbb{L}^3$ からの誘導計量がローレンツ計量となる曲面を指す．時間的曲面の重要な性質として，曲面の主曲率が実数の範囲内で常に取れるとは限らない，というものがある．これは曲面の主曲率を与える型作用素が常に実対角化可能ではないということに起因する．時間的曲面のうち，その平均曲率が恒等的に零になっているものを**時間的極小曲面**と呼び，時間的極小曲面に対して型作用素の対角化可能性を考える．型作用素の対角化可能性は曲面のガウス曲率の符号を調べることに帰着されるため，本稿では時間的極小曲面がある種の特異点を許容する場合に，特異点の近傍で曲面のガウス曲率はどのような振る舞いをするか，という問題を考える．

2. 時間的極小曲面と特異点

2.1. 特異点付きの時間的極小曲面のクラスについて

任意の時間的極小曲面は次の表示を持つことが知られている．

事実 1 ([3])**.** $\varphi(u)$ および $\psi(v)$ を各点においてそれらの微分 $\varphi'(u)$ および $\psi'(v)$ が一次独立な $\mathbb{L}^3$ 内の正則なナル曲線，すなわち，

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \gamma'(t) \neq 0, \quad t \in I$$

を満たす曲線とする．このとき

$$f(u,v) = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{2} \tag{2.1}$$

は時間的極小曲面を与える．逆に任意の時間的極小曲面は，局所的にはある2つの正則なナル曲線 $\varphi(u)$ および $\psi(v)$ が存在して，式 (2.1) を満たすように表される．

本稿では上記の時間的極小曲面にある種の特異点を許容したクラスを考える．文献 [6] において，高橋は次で定義される余階数1，すなわち，接平面の像が一次元に退化する特異点のみを許容する時間的極小曲面のクラスを導入した．

定義 2 ([6])**.** 2次元多様体 Σ に対して，滑らかな写像 $f\colon \Sigma \to \mathbb{L}^3$ が**極小面 (minface)** であるとは，次を満たす場合をいう．

本研究は JSPS 科研費 JP15J06677 の助成を受けたものである．

* 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地　九州大学大学院数理学府
e-mail: `s-akamine@math.kyushu-u.ac.jp`

(1) Σ の各点の近傍で局所座標近傍 $(U; u, v)$ が存在して，f は U 上では正則なナル曲線による表示 (2.1) を持つ.

(2) Σ の開かつ稠密な部分集合 W が存在して，f の W 上への制限がはめ込みになる.

ここで，f がはめ込みにならないような Σ 上の点を極小面 f の**特異点**と呼び，特異点でない点を**正則点**と呼ぶ.

極小面とは時間的極小曲面で，ある開稠密集合の外側で余階数 1 の特異点を許容するものとなっている．他方で，余階数 1 の特異点のみを許容する空間的な平均曲率零曲面（極大曲面と呼ぶ）として，梅原-山田 [7] により導入された**極大面** (**maxface**) と呼ばれるクラスがあり，種々の特異点の判定法を始めとして多くの研究がなされている [2, 7].

注意 3. [6] におけるオリジナルの極小面の定義は，パラ・リーマン面を用いたものであるが，本稿では特異点の近傍でのガウス曲率を調べるという目的から，上記の定義を採用する．オリジナルの定義による極小面は，定義 2 の条件を満たす.

2.2. フロンタルと波面

次に主結果を述べる際に必要となるフロンタルや波面といった特異点付きの曲面の概念を述べておく．U を $\mathbb{R}^2$ の領域とし，滑らかな写像 $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が**フロンタル**であるとは，U 上でユークリッド計量 $\langle , \rangle_E$ の意味での単位法ベクトル場 n が存在するときをいう．さらに　ルジャンドル持ち上げと呼ばれる写像の組

$$L = (f, n)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$$

がはめ込みを与えるとき，f を**波面** (**wave front**) と呼ぶ．フロンタル $f = f(u, v)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して，f がはめ込みにならない点 $p \in U$ をフロンタル f の**特異点**と呼ぶ．特異点は，符号付き面積密度関数と呼ばれる関数 $\lambda = \det(f_u, f_v, n)$ の零点に他ならないが，特に $d\lambda_p \neq 0$ を満たす特異点 p のことを**非退化特異点**と呼ぶ.

次に写像（芽）の $\mathcal{A}$-同値性とフロンタルや波面に現れる典型的な特異点について述べる．U_i を $\mathbb{R}^2$ の領域，p_i を U_i の点とする（$i = 1, 2$）．2 つのなめらかな写像 $f_1\colon U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ と $f_2\colon U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が $p_1 \in U_1$ および $p_2 \in U_2$ で **$\mathcal{A}$-同値**，または**右左同値**であるとは，$\Phi(p_1) = p_2$ を満たす $\mathbb{R}^2$ の局所微分同相写像 Φ と，$\Psi(f_1(p_1)) = f_2(p_2)$ を満たす $\mathbb{R}^3$ の局所微分同相写像 Ψ が存在して $f_2 = \Psi \circ f_1 \circ \Phi^{-1}$ を満たすことをいう．フロンタル $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の特異点 p が**カスプ辺** (**cuspidal edge**)，**ツバメの尾** (**swallowtail**)，または**カスプ状交叉帽子** (**cuspidal cross cap**) であるとは，f が p 上で次の写像 f_C，f_S，または f_{CCR} の原点と $\mathcal{A}$-同値であることをいう（図 1 参照）：

$$f_C(u, v) = (u^2, u^3, v), \quad f_S(u, v) = (3u^4 + u^2 v, 4u^3 + 2uv, v), \quad f_{CCR}(u, v) = (u, v^2, uv^3).$$

高橋 [6] は，極小面に対するワイエルシュトラス型の表現公式を与え，極小面上に現れるカスプ辺，ツバメの尾およびカスプ状交叉帽子に対する判定法や特異点の双対定理を与えている.

3. 主定理

3.1. カスプ辺以外の非退化特異点の近傍におけるガウス曲率

極小面はユークリッド計量に対する法ベクトル場を考えることで，特異点上でも単位法ベクトル場を定義でき，フロンタルの構造を持つことが知られている．一般に極

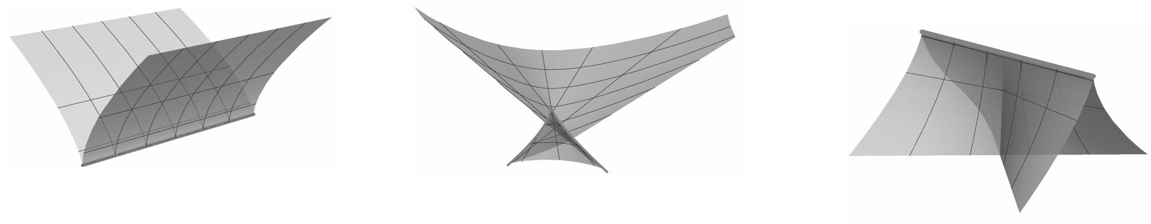

図 1: 左からカスプ辺，ツバメの尾およびカスプ状交叉帽子.

小面上の全ての特異点が波面の特異点を与えるわけではないが，特異点の近傍でのガウス曲率の符号が負になるか正になるかは，カスプ辺以外の特異点の近傍では，次のように特異点上で極小面の写像が波面の構造を持つかどうかで決まる.

定理 4 ([1]). 写像 $f\colon\Sigma\longrightarrow\mathbb{L}^3$ を極小面，$p\in\Sigma$ を f のカスプ辺でない特異点する．このとき，次が成り立つ.

(1) f が特異点 p 上で波面になるならば，ガウス曲率 K は p の近傍で負になり，$\lim_{q\to p}K(q)=-\infty$ が成り立つ．特に，そのような特異点の近傍では常に実数の主曲率が取れる.

(2) f が特異点 p 上で波面にはならず，p がフロンタルの非退化特異点になるならば，ガウス曲率 K は p の近傍で正になり，$\lim_{q\to p}K(q)=\infty$ が成り立つ．特に，そのような特異点の近傍では常に複素数の主曲率のみが取れる.

ツバメの尾は波面の特異点であり，カスプ状交叉帽子は波面の特異点ではないが，フロンタルの非退化特異点である ([2, 7] を参照) ため，そのような特異点の近傍ではガウス曲率はそれぞれ定理の (1)，(2) の振る舞いをする.

例 5. (2.1) において，2 本の正則なナル曲線を次のようにして取ることで得られる極小面を**時間的エネパー曲面**という：

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}(-u-\frac{u^3}{3},u-\frac{u^3}{3},u^2),\quad \psi(v)=\frac{1}{2}(v+\frac{v^3}{3},v-\frac{v^3}{3},v^2).$$

この曲面は，ツバメの尾特異点を持つ（図2，左）ので，少なくとも特異点の近傍ではガウス曲率が負になることが定理4の (1) よりわかる．他方で,

$$f^*(u,v)=\frac{\varphi(u)-\psi(v)}{2}$$

と書かれる曲面は，時間的エネパー曲面の共役曲面と呼ばれ，カスプ状交叉帽子特異点を持つ（図2，右）．したがって，定理4の (2) により，特異点の近傍ではガウス曲率が正になることがわかる.

3.2. カスプ辺の近傍におけるガウス曲率

カスプ辺を持つ波面に対しては，[4, 5] などにより多くの不変量が導入され，それらによって波面の幾何学的な性質が明らかにされている．特に，次で定義されるカスプ辺の特異曲率と呼ばれる不変量はカスプ辺の近傍のガウス曲率の挙動と密接に関係している.

図 2: 時間的エネパー曲面とその共役曲面.

定義 6 ([5]). 波面 $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 上の特異曲線 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to U$ がカスプ辺からなるとする．カスプ辺 γ に対する**特異曲率 (singular curvature)** κ_s は，次で定義される：

$$\kappa_s(t) = \mathrm{sgn}(d\lambda(\eta))\frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), n)}{|\hat{\gamma}'(t)|^3},$$

ここで，$\hat{\gamma} = f \circ \gamma$，$|\hat{\gamma}'(t)| = \langle \hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}'(t)\rangle_E^{1/2}$ であり，$\langle , \rangle_E$ はユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ の内積である.

特異点を持たない正則曲面 $f : \Sigma \to \mathbb{E}^3$ 上の曲線 γ の測地的曲率 κ_g は,

$$\kappa_g(t) = \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \nu)}{|\hat{\gamma}'(t)|^3},$$

（ここで，$\hat{\gamma} = f \circ \gamma$，$\nu$ は Σ の単位法ベクトル場）と書かれるため，カスプ辺上の特異曲率は，ある種の符号付きの測地的曲率と考えることができる．特異曲率の符号は次のように定まっている：カスプ辺が折れる向きと同じ方向に特異曲線の像が曲がっているカスプ辺の特異曲率が正，逆にカスプ辺が折れる向きと逆方向に特異曲線の像が曲がっているカスプ辺の特異曲率が負となる（図 3 参照）.

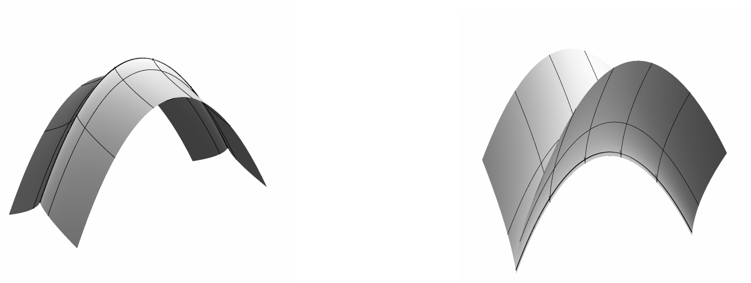

図 3: $\kappa_s > 0$ のカスプ辺（左）と $\kappa_s < 0$ のカスプ辺（右）.

[5] において，佐治-梅原-山田は，$\mathbb{E}^3$ からの誘導計量に関するガウス曲率 K_E が有界なとき，カスプ辺の形には特異曲率から来る次のような制限があることを証明した.

事実 7 ([5, Theorem 3.1]). カスプ辺の近傍で，ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ からの誘導計量に関するガウス曲率 K_E が有界かつ正（または非負）のとき，カスプ辺の特異曲率は負（または非正）になる.

$\mathbb{L}^3$ 内の極小面上に現れるカスプ辺に対しても，事実7のように，カスプ辺の特異曲率とガウス曲率について次の関係を証明できる．

定理 8 ([1]). 極小面 $f\colon \Sigma \longrightarrow \mathbb{L}^3$ 上のカスプ辺の近傍に臍点は存在しない．さらに，カスプ辺 $p \in \Sigma$ の特異曲率 κ_s が $\kappa_s(p) \neq 0$ を満たすならば，$\mathbb{L}^3$ からの誘導計量に関するガウス曲率 K と κ_s の符号は p の近傍で一致する．一方で，$\kappa_s(p) = 0$ ならば，p を通る Σ 上の正則曲線で擬臍点（型作用素が対角化可能でなくなる点）からなるものが存在する．

以上の定理4と定理8によって，極小面上に現れる任意の非退化特異点の近傍におけるガウス曲率の符号，すなわち実数の主曲率の有無，が完全に決定できたことになる．

3.3. 終わりに

最後に，極小面に属さない特異点付きの時間的極小曲面に対しては，極小面上には現れない特異点がしばしば現れ（図4），ガウス曲率は特異点の近傍で定理4や定理8のようには振る舞わないことを指摘しておく．筆者は現在，そうしたより一般のクラスに属する時間的極小曲面の特異点の判定やガウス曲率の挙動の研究を行っている．

図 4: D_4^+-特異点と呼ばれる余階数2の特異点を持った時間的極小曲面（左）と $(2,5)$-カスプ辺と呼ばれる特異点を持った時間的極小曲面（右）.

参考文献

[1] S. Akamine, *Behavior of the Gaussian curvature of timelike minimal surfaces with singularities*, preprint, arXiv:1701.00238.

[2] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.

[3] L. McNertney, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Ph.D. thesis, Brown University, 1980.

[4] L.F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, Springer Proc. Math. Stat. **154** (2016) 247–281.

[5] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009) 491–529.

[6] 高橋英伸，特異点を許す3次元時空内の時間的極小曲面について，2012年修士論文，大阪大学.

[7] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.