非連結リー群による非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用 *

権藤 曉則 (広島大学大学院理学研究科博士課程前期 2 年)

概要

先行研究により, 連結リー群による非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用について, 軌道の性質による分類が知られている．本論文では, 作用するリー群の連結性の仮定を外した余等質性 1 作用の軌道の性質による分類と, それぞれの構成条件を与える．

1 Introduction

M を非コンパクト型既約リーマン対称空間, H を M の等長変換群 $\mathrm{Isom}(M)$ の閉部分群とする．ここで, H の連結性は仮定しない．H の M への作用が余等質性 1 であるとは, 正則軌道が余次元 1 となることである．ここで, 正則軌道とは最大次元の軌道のことである．正則でない軌道を特異軌道と呼ぶ．連結リー群による余等質性 1 作用については次のことが知られている．

定理 1.1 ([1], [2])**.** 連結リー群による非コンパクト型既約リーマン対称空間への余等質性 1 作用は, 次のいずれか一つを満たす (このような作用を type (K), (A), (N) 作用と呼ぶことにする)．

type (K) 唯一つの特異軌道を持つ．軌道空間は $[0, \infty)$ と同相．

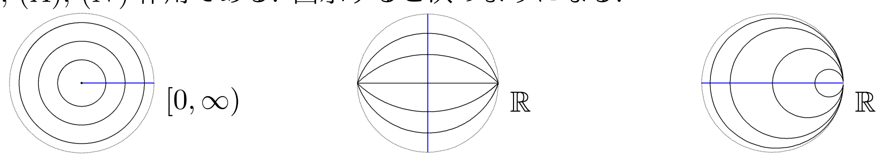
type (A) 全ての軌道は正則で, 唯一つの極小軌道を持つ．軌道空間は $\mathbb{R}$ と同相．

type (N) 全ての軌道は正則で, 互いに合同である．軌道空間は $\mathbb{R}$ と同相．

例えば, 実双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ について,

$$K = \mathrm{SO}(2), \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

とすると, 岩澤分解 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = KAN$ が得られるが, K, A, N の $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への作用はそれぞれ type (K), (A), (N) 作用である．図示すると次のようになる．



type (K) type (A) type (N)

* 部分多様体論 · 湯沢 2017 (湯沢グランドホテル, 11 月 30 日–12 月 2 日) 講演記録

2 Main result

本研究の主結果は, 定理 1.2 の拡張である. H の M への作用が余等質性 1 のとき, H の単位元成分 H^0 による作用は type (K), (A), (N) となることに注意し, 以下を得た.

定理 2.1. 非コンパクト型既約リーマン対称空間への余等質性 1 作用のうち, 非連結な軌道を持つものは, 次の 4 つの性質のいずれか一つを満たす.

type (A_R)　H^0 の作用は type (A) であり, 軌道空間は $[0,\infty)$ と同相. この場合, 唯一の極小かつ連結な軌道を持ち, 他の軌道は極小でなく, 連結成分 2 つ.

type (N_P)　H^0 の作用は type (N) であり, 軌道空間は S^1 と同相. この場合, 全ての軌道は互いに合同で, 連結成分は可算無限個.

type (N_R)　H^0 の作用は type (N) であり, 軌道空間は $[0,\infty)$ と同相. この場合, 唯一の連結軌道を持ち, 他の軌道は連結成分 2 つ.

type (N_{PR})　H^0 の作用は type (N) であり, 軌道空間は $[0,1]$ と同相. この場合, 全ての軌道は連結成分が可算無限個で, ちょうど 3 つの弱鏡映軌道を持ち, 内 2 つは合同である.

次に, それぞれの構成条件を見る. 上の定理より, 非連結軌道を持つ余等質性 1 作用は, type (A), (N) 作用を拡張して構成される. そこで, 連結リー群による作用の拡張可能性を次で定義する.

定義 2.2. 連結リー群 H' の M への作用が type (A_R) (resp. type (N_P), type (N_R), type (N_{PR})) に拡張可能であるとは, ある閉部分群 $H \subset \mathrm{Isom}(M)$ が存在して, 次を満たすこと:

(i) H の M への作用は type (A_R) (resp. type (N_P), type (N_R), type (N_{PR})) である,
(ii) H' と H^0 の作用は軌道同値である.

非連結軌道を持つ余等質性 1 作用の構成は, 軌道の弱鏡映性と密接にかかわる.

定義 2.3 ([3])**.** M のリーマン部分多様体 N が弱鏡映であるとは, 各点 $p \in N$ と法ベクトル $\xi \in T_p^{\perp}N$ に対し, $\sigma \in \mathrm{Isom}(M)$ が存在して, $\sigma(p) = p, \sigma(N) = N, (d\sigma)_p(\xi) = -\xi$ を満たすこと.

命題 2.4. 全ての type (A) 作用は type (A_R) 作用に拡張可能. また, 全ての type (N) 作用は type (N_P) 作用に拡張可能.

具体的な構成法としては, type (A_R) 作用は, type (A) 作用の極小軌道の弱鏡映性を用いることによって構成できる. type (N_P) 作用は, type (N) 作用の軌道を等間隔にばらまく, という方法で構成できる. 残りの type (N_R), type (N_{PR}) 作用への拡張可能性については, 軌道の弱鏡映性によって特徴づけられる.

命題 2.5. H' の M への作用が type (N) であるとする. このとき, 次の 4 つは同値.

(1) 弱鏡映となる H'-軌道が存在する.

(2) 全ての H'-軌道は弱鏡映である.

(3) H' 作用は type (N_R) 作用に拡張可能である.

(4) H' 作用は type (N_{PR}) 作用に拡張可能である.

したがって, 非連結軌道を持つ余等質性 1 作用の分類は, 弱鏡映な等質超曲面の分類に帰着される. 個々の対称空間については, 現時点では $\mathbb{R}\mathrm{H}^n, \mathbb{C}\mathrm{H}^n, \mathbb{H}\mathrm{H}^2, \mathbb{O}\mathrm{H}^2, \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ への余等質性 1 作用について, 作用するリー群の連結性を仮定しない完全な分類が得られている.

参考文献

[1] J. Berndt and H. Tamaru, *Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces*, J. Differential Geom. **63** (2003), no. 1, 1–40.

[2] J. Berndt and H. Tamaru, *Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type*, J. Reine Angew. Math. **683** (2013), 129–159.

[3] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437–481.