キャリブレーションの不等式の群作用による統一的証明

井川治 (京都工芸繊維大学)*

この研究は笹木集夢（東海大学）と馬場蔵人（東京理科大学）との共同研究である．

Harvey-Lawson([3]) や Mealy([11]) の扱ったキャリブレーションの不等式は Riemann 多様体や擬 Riemann 多様体への超極作用と呼ばれる性質の良い群作用を利用すると見通し良く証明できる．その証明の考え方を示すため，§ 1 で雛型として Cauchy-Schwarz の不等式を回転群の作用を利用して示す．§ 2 ではキャリブレーションの不等式の一例として逆向き特殊 Lagrangian 不等式を取り上げ，ある群作用を利用して証明を与える．今後の課題を § 3 で述べる．

1 Cauchy-Schwarz の不等式

3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の標準内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表す.

定理 1.1. [Cauchy-Schwarz の不等式]　$x, y \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\langle x, y\rangle^2 + \|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 \tag{1.1}$$

が成り立つ．特に，$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ が成り立つ．等号成立条件は $x \times y = 0$ である．

証明．$x = 0$ または $y = 0$ のとき主張が成り立つことは明らかだから，主張を証明するためには $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ と仮定してよい．実数 k に対して,

$$\langle kx, y\rangle^2 = k^2\langle x, y\rangle^2, \quad \|kx \times y\|^2 = k^2\|x \times y\|^2, \quad \|kx\|^2 = k^2\|x\|^2$$

となるから，主張を証明するためには $\|x\| = 1$ としてよい．同様にして $\|y\| = 1$ としてよい．任意の $g \in SO(3)$ に対して

$$\langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \|gx \times gy\| = \|x \times y\|, \quad \|gx\| = \|x\|$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^3$ の標準正規直交基底を $\{e_1, e_2, e_3\}$ と表す．$SO(3)$ の $\mathbb{R}^3$ の超球面 S^2 への作用は推移的だから主張を示すためには $x = e_1$ としてよい．$SO(3)$ の e_1 におけるイソトロピー群 $SO(3)_{e_1} = SO(2)$ は $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ の単位円周 S^1 に推移的に働くから，$y = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 (0 \leq \theta \leq \pi)$ としてよい．このとき，$\langle x, y\rangle = \cos\theta$, $x \times y = \sin\theta e_3$ だから，(1.1) が成り立つ.

残りの主張は明らかである．□

2 逆向き特殊 Lagrangian 不等式

2 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の元 (x, y) を $x + \tau y$ と表し，$\tau^2 = 1$ により複素数体の構成と同様にして積の構造を入れる．この積と通常の和に関して $\mathbb{R}^2$ は可換環になる．この可換環 $\mathbb{R}^2$ を**分離型複素数**といい，$\mathbb{L}$ と表す（$\mathbb{L}$ は体にはならない）:

$$\mathbb{L} = \mathbb{R}^2 = \{x + \tau y \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \tau^2 = 1$$

*e-mail: ikawa@kit.ac.jp

$\mathbb{L}$ の n 個の直積を $\mathbb{L}^n$ と表す．実ベクトル空間として $\mathbb{L}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と同型である．$\mathbb{R}^{2n}$ の標準基底を $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ と表すと，$\tau e_i = e_{n+i}$ $(1 \le i \le n)$ となる．$\mathbb{L}^n$ に次のようにして非退化対称スカラー積 $\langle\ ,\ \rangle$ を入れる：

$$\langle e_i, e_j\rangle = -\langle \tau e_i, \tau e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle e_i, \tau e_j\rangle = 0 \quad (1 \le i, j \le n)$$

このとき，$\langle \tau u, \tau v\rangle = -\langle u, v\rangle$ が成り立つ：

$$\mathbb{L}^n = \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{R} e_i}_{+} \oplus \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{R}\tau e_i}_{-} = (\mathbb{R}^{2n}_n, \langle\ ,\ \rangle, \tau)$$

$\omega(u, v) := \langle u, \tau v\rangle$ とおくと，ω は $\mathbb{L}^n$ 上の交代形式となる．$\mathbb{L}^n = \mathbb{R}^{2n}_n$ の実 n 次元部分空間 V で $\langle\ ,\ \rangle$ を V に制限したものが正定値内積を与えるようなものの全体のなす等質多様体を $G_n(\mathbb{L}^n)$ と表す：

$$G_n(\mathbb{L}^n) := \{V \subset \mathbb{L}^n \mid \dim_{\mathbb{R}} V = n, V : \text{正定値}\}$$

$V \in G_n(\mathbb{L}^n)$ が**分離型 Lagrangian** であるとは，$\omega(V, V) = 0$ となるときをいう．この概念を不変にする群について述べる．まず，$\mathbb{L}^n$ 上の $\mathbb{L}$-線型同型写像全体のなす群を $GL(n, \mathbb{L})$ で表し，$GL(n, \mathbb{L})$ の部分群 $U(n, \mathbb{L})$ を

$$U(n, \mathbb{L}) := \{g \in GL(n, \mathbb{L}) \mid \langle gu, gv\rangle = \langle u, v\rangle\}$$

と定義する．$GL(n, \mathbb{L})$ の元は成分を $\mathbb{L}$ の元とする n 次正方行列で表現される．$\mathbb{L}$ は可換環だから，$GL(n, \mathbb{L})$ の元に対して通常のように行列式が定義される．$U(n, \mathbb{L})$ の部分群 $U^+(n, \mathbb{L}), SU(n, \mathbb{L})$ を

$$U^+(n, \mathbb{L}) := \{g \in U(n, \mathbb{L}) \mid \mathrm{Re}(\det_{\mathbb{L}}(g)) > 0\}, \quad SU(n, \mathbb{L}) := \{g \in U(n, \mathbb{L}) \mid \det_{\mathbb{L}}(g) = 1\}$$

と定義する．群の同型 $U(n, \mathbb{L}) \cong GL(n, \mathbb{R})$, $U^+(n, \mathbb{L}) \cong GL^+(n, \mathbb{R})$, $SU(n, \mathbb{L}) \cong SL(n, \mathbb{R})$ が成り立つ．ω は $U(n, \mathbb{L})$-不変だから，$V \in G_n(\mathbb{L}^n)$ が分離型 Lagrangian ならば，任意の $g \in U(n, \mathbb{L})$ に対して gV も分離型 Lagrangian である．$V \in G_n(\mathbb{L}^n)$ とその向きの組全体のつくる等質多様体を $\tilde{G}_n(\mathbb{L}^n)$ と表す．$\tilde{G}_n(\mathbb{L}^n)$ の連結成分の個数は 2 である．$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n := (\mathbb{R}^n, \{e_1, \dots, e_n\})$ を含む連結成分を $\tilde{G}^+_n(\mathbb{L}^n)$ と表す．$(V, \text{向き}) \in \tilde{G}^+_n(\mathbb{L}^n)$ が**分離型特殊 Lagrangian** であるとは，V が Lagrangian であり，$g \in SU(n, \mathbb{L})$ が存在して $(V, \text{向き}) = g(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$ となるときをいう．$\mathbb{L}^n$ 上 $SU(n, \mathbb{L})$-不変 n 次交代形式 φ を次で定義する：

$$\varphi(X_1, \cdots, X_n) := \mathrm{Re}\ \det_{\mathbb{L}}(X_1, \cdots, X_n)$$

φ は自然に写像 $\tilde{G}^+_n(\mathbb{L}^n) \to \mathbb{R}$ を誘導する．この写像も φ で表す．このとき，次が成り立つ．

定理 2.1. (逆向き特殊 Lagrangian 不等式，Mealy, 1989 [11])
任意の $V \in \tilde{G}^+_n(\mathbb{L}^n)$ に対して $\varphi(V) \ge 1$ が成り立つ．
等号成立条件は V が分離型特殊 Lagrangian になることである．

以下，証明の方針を示す．n が偶数の場合と奇数の場合で記述が多少異なるので，ページ制限の都合上 n が偶数 $(n = 2m)$ の場合だけ主張を示すが，n が奇数の場合にも同様に証明できる．

実数 x_i $(1 \le i \le n)$ に対して，$u_i := e_{2i-1}, v_i := \cosh x_i e_{2i} + \sinh x_i \tau e_{2i-1}$ とおくと，

$$\langle u_i, u_i\rangle = \langle v_i, v_i\rangle = 1, \quad \langle u_i, v_i\rangle = 0, \quad \langle u_i, \tau v_i\rangle = \sinh x_i$$

が成り立つ．$i \ne j$ のとき $\langle \mathbb{L}u_i + \mathbb{L}v_i, \mathbb{L}u_j + \mathbb{L}v_j\rangle = 0$．以上を踏まえて $V(x_1, \cdots, x_m) \in \tilde{G}^+_n(\mathbb{L}^n)$ を $V(x_1, \cdots, x_m) = u_1 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge v_m$ と定義する．特に $V(0) = (\mathbb{R}^n, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$.

$\tilde{G}^+_n(\mathbb{L}^n)$ には自然に $U^+(n, \mathbb{L})$ が作用する．この作用の軌道空間を $U^+(n, \mathbb{L}) \backslash \tilde{G}^+_n(\mathbb{L}^n)$ と表す．

命題 2.2. (Mealy [11]) $\tilde{G}_n^+(\mathbb{L}^n)$ 内の任意の $U^+(n,\mathbb{L})$ に対して，$x_1 \geq \cdots x_{m-1} \geq |x_m|$ を満たす $(x_1,\cdots,x_m) \in \mathbb{R}^m$ がただ一つ存在して，その軌道は $V(x_1,\cdots,x_m)$ を通る．すなわち，軌道空間 $U^+(n,\mathbb{L})\backslash\tilde{G}_n^+(\mathbb{L}^n)$ は次の集合と同一視される：

$$U^+(n,\mathbb{L})\backslash\tilde{G}_n^+(\mathbb{L}^n) = \{V(x_1,\cdots,x_m)|\, x_1 \geq \cdots x_{m-1} \geq |x_m|\}$$

上の命題の証明の概略を後で述べる．次の補題の証明は，省略するが初等的である．

補題 2.3. $g \in U(n,\mathbb{L})$ に対して，

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Re}\ \det\nolimits_{\mathbb{L}}(g)| \geq 1\\ &\mathrm{Re}\ \det\nolimits_{\mathbb{L}}(g) = \pm 1 \Leftrightarrow \det\nolimits_{\mathbb{L}}(g) = \pm 1 \quad (\text{複号同順})\end{aligned}$$

補題 2.3 より

$$U^+(n,\mathbb{L}) = \{g \in U(n,\mathbb{L}) \mid \mathrm{Re}\ \det\nolimits_{\mathbb{L}}(g) \geq 1\}, \quad SU(n,\mathbb{L}) = \{g \in U^+(n,\mathbb{L}) \mid \mathrm{Re}\ \det\nolimits_{\mathbb{L}}(g) = 1\}$$

が成り立つ.

定理 2.1 の証明．命題 2.2 より，任意の $V \in \tilde{G}_n^+(\mathbb{L}^n)$ に対して $g \in U^+(n,\mathbb{L})$ と $x = (x_1,\cdots,x_m)$ が存在して $V = gV(x)$．このとき，$\varphi(V) = \cosh x_1 \cdots \cosh x_m \,\mathrm{Re}(\det_{\mathbb{L}}(g)) \geq 1$．等号成立条件は

$$\varphi(V) = 1 \Leftrightarrow x_i = 0, g \in SU(n,\mathbb{L}) \Leftrightarrow V : \text{分離型特殊 Lagrange 部分空間}$$

□

命題 2.2 の証明の方針．$G := SO_0(n,n)$ とおくと，G は連結非 compact 単純 Lie 群で中心有限である．$H := GL^+(n,\mathbb{R})$ は連結で，G のある対合 σ の固定点集合になる．G の Cartan 対合 θ の固定点集合は $K := SO(n) \times SO(n)$ であり，θ と σ は可換になる．そこで後述の定理 2.4 を適用し，作用まで含めて同型 $[U^+(n,\mathbb{L}) \curvearrowright \tilde{G}_n^+(\mathbb{L}^n)] \cong [H \curvearrowright G/K]$ が成り立つことを利用すると主張が得られる． □

G を連結非 compact 単純 Lie 群で中心有限と仮定する．θ を G 上の Cartan 対合，σ を G 上の対合で，θ と可換なものとする．G の θ による固定点集合 $K = F(\theta, G)$ は G の極大 compact 部分群になる ([4, Chap. VI, Thm 1.1])．G の σ による固定部分群の単位元の連結成分を $H = F(\sigma, G)_0$ と表す．非 compact 型 Riemann 対称空間 G/K への自然な H の等長作用による軌道全体のなす空間を $H\backslash G/K$ と表す．$\pi : G \to G/K$ で自然な射影を表す．三組 $(G,H;K)$ から重複度付き対称三対 $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)$ が定まる（重複度付き対称三対の定義については [7] を参照，$(G,H;K)$ から重複度付き対称三対が定まることについては [1] を参照）．以上の設定の下で F.-Jensen や Rossmann の定理を述べると次のようになる．

定理 2.4. (F.-Jensen 1978 [6], Rossmann 1979 [12]) Σ から定まる $\mathfrak{a}$ の非有界閉集合 $\overline{\mathfrak{a}_+}$ が存在して，軌道空間 $H\backslash G/K$ は次のようにして $\overline{\mathfrak{a}_+}$ と 同一視される：

$$H\backslash G/K \cong \overline{\mathfrak{a}_+};\ H\pi(\exp X) \leftrightarrow X$$

さて，compact 型対称空間と非 compact 型対称空間の間の双対を拡張した一般化された双対について $(G,H;K) = (SO_0(n,n), GL^+(n,\mathbb{R}); SO(n) \times SO(n))$ と $(G_u,K_1,K_2) = (SO(2n), SO(n) \times SO(n), U(n))$ が互いに双対になる（一般化された双対については [1] または [10] を参照）．この $(G,H;K)$ を逆向きの特殊 Lagrangian 不等式の証明に用いた．また，この compact 対称三対

(G_u, K_1, K_2) に対して，定理 2.4 の代わりに Hermann の定理 ([5]) を適用すると (通常の向きの) 特殊 Lagrangian 不等式が示される．

同様に compact 対称三対 $(G_u, K_1, K_2) = (SO(2n+2m), SO(2n) \times SO(2m), U(n+m))$ から得られる Hermann 作用 $K_2 \curvearrowright G/K_1$ を用いると Wirtinger 不等式が得られる．(G_u, K_1, K_2) の一般化された双対は $(G, H; K) = (SO_0(2n, 2m), U(n, m); SO(2n) \times SO(2m))$ である．$(G, H; K)$ から得られる Hermann 型作用 $H \curvearrowright G/K$ に定理 2.4 を適用すると逆向き Wirtinger 不等式が得られる．

associative 不等式はある compact 対称空間への余等質性 1 の作用 (主軌道の余次元が 1 の作用) を用いて得られる．逆向き associative 不等式はある非 comoact 型対称空間への余等質性 1 作用を用いて得られる．

これらを表にしてまとめると次のようになる．

不等式	群作用
(逆向き)Wirtinger 不等式	Hermann(型)
(逆向き) 特殊 Lagrangian 不等式	Hermann(型)
(逆向き)associative	余等質性 1
(逆向き)coassociative	余等質性 1
(逆向き)Cayley	余等質性 1

3 今後の課題

$\mathbb{H}^n$ で四元数 n 次元四元数ベクトル空間を表す．$\mathbb{H}^n$ は $4n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{4n}$ に四元数構造 $\{I, J, K\}$ と四元数構造で不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を組み込んだものと見ることができる．

$$\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{4n}, I, J, K, \langle\ ,\ \rangle)$$

$Sp(n) \times Sp(1)$ の $\mathbb{H}^n$ への作用を効果的にしたものは $Sp(n) \cdot Sp(1) = Sp(n) \times Sp(1)/\{\pm(E_n, 1)\}$ となる．$\tilde{G}^{\mathbb{R}}_m(\mathbb{H}^n)$ で $\mathbb{H}^n$ 内の向きのついた m 次元実ベクトル空間全体のなすグラスマン多様体を表す．$Sp(n) \cdot Sp(1)$ の $\mathbb{H}^n$ への作用は自然に $Sp(n) \cdot Sp(1)$ の $\tilde{G}^{\mathbb{R}}_m(\mathbb{H}^n)$ への作用を誘導する．三つの複素構造 I, J, K に対するケーラー形式をそれぞれ $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ と表す．このとき，4 次交代形式 $\omega_I^2, \omega_J^2, \omega_K^2$ はそれぞれ $Sp(n)$-不変であり，$Sp(n) \cdot Sp(1)$-不変ではないが，それらの和 $\Omega = \omega_I^2 + \omega_J^2 + \omega_K^2$ は $Sp(n) \cdot Sp(1)$-不変 4 次交代形式となる．m が 4 の倍数のときには，$\tilde{G}^{\mathbb{R}}_m(\mathbb{H}^n)$ の元に四元数部分空間があることに注意する．この四元数部分空間をキャリブレーションの不等式の等号成立条件で特徴付ける次の定理が知られている．

定理 3.1. (Berger 1972 [2], Tasaki 1988 [13])

任意の $V \in \tilde{G}^{\mathbb{R}}_{4k}(\mathbb{H}^n)$ に対して $|\Omega^k(V)| \leq 1$ が成り立つ．等号成立条件は，V が四元数部分空間となることである．

軌道空間 $Sp(n) \cdot Sp(1) \backslash \tilde{G}^{\mathbb{R}}_{4k}(\mathbb{H}^n)$ を求め，その系として上の定理を示すような証明は今のところ知られていない．そこで，このような証明を与えることが今後の課題となる．これが出来ると軌道空間 $Sp(n) \cdot Sp(1) \backslash \tilde{G}^{\mathbb{R}}_{4k}(\mathbb{H}^n)$ に対する新しい知識が得られることになる．[1]また，その双対 (逆向きの不等式) の考察をすることも課題となる．

参考までに $Sp(n) \cdot Sp(1)$-作用の軌道空間 $Sp(n) \cdot Sp(1) \backslash \tilde{G}^{\mathbb{R}}_m(\mathbb{H}^n)$ (m は 4 の倍数とは限らない) について知られていることを記しておく．$Sp(n)$ は $\mathbb{H}^n$ の単位超球面に推移的に作用するので，

[1]このようなことが出来ると四元数双曲空間 $\mathbb{H}H^n$ 内の等質超曲面（言い換えると余等質性 1 作用の軌道）の分類に応用できるのではないか，ということを広島大学 田丸博士教授にご教示頂いた．

$Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $G_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^n)$ への作用も推移的である．$Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^n)$ への作用は余等質性 1 の超極作用である (Kollross [9])．その標準形（切断）は $V(\theta) = \langle e_1, e_1 i\cos\theta + e_2 \sin\theta\rangle_{\mathbb{R}} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2)$ で与えられる．上のような特別な場合を除いて $Sp(n)\cdot Sp(1)$ の $\tilde{G}_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^n)$ への作用は超極作用ではない ([9]).

参考文献

[1] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, A duality between symmetric pairs and compact symmetric triads, in preparation.

[2] M. Berger, Du côte de chez Pu, Ann. Sci. École Norm. Sup. **5** (1972), 1–44.

[3] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., Calibrated geometries, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[4] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Pure and Applied Mathematics **80**, Academic Press, 1978.

[5] R. Hermann, Totally geodesic orbits of groups of isometries, Nerderl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A(1962), 291–298.

[6] M. Flensted-Jensen, Spherical Functions on a Real Semisimple Lie Group, A Method of Reduction to the Complex Case, Journal of Functional Analysis **30** (1978), 106–146.

[7] O Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan **63** (2011) 70-136, DOI:10.2969/jmsj/06310079.

[8] O Ikawa, The geometry of orbits of Hermann type actions, Contemporary perspectives in differential Geometry and its related fields, 67–78, World sci. publ.

[9] A. Kollross, A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 571–612.

[10] A. Kollross, Duality of symmetric spaces and polar actions, J. Lie Theory (2011), 961–986.

[11] J. Mealy, Calibrations on semi-Riemannian manifolds, Ph. D. Thesis, Rice Univ., Houston, 1989; Volume maximization in semi-Riemannian manifolds, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991) 793–814.

[12] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces, Canad. J. Math. **31** (1979), 157–180.

[13] H. Tasaki, Calibrated geometries in quaternionic grassmannians, Osaka J. Math. **25** (1988), 591–598.