大仁田の指数公式の Hermann 作用の特別な極小軌道への拡張

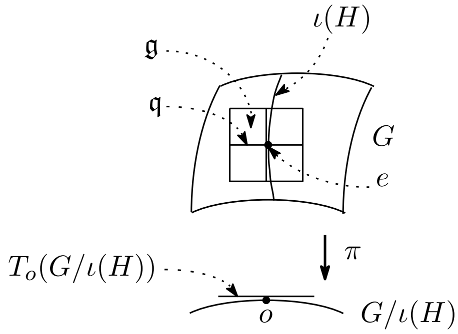
小池直之 (東京理科大学)

部分多様体・湯沢 2017
大仁田義裕教授還暦のお祝い研究集会

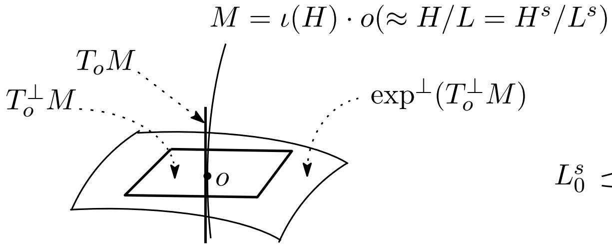
1 序章

G/K をコンパクト型対称空間とし，$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ を，各々，G, K のリー代数とする ((G, K) は，対称対とする)．θ を $(\mathrm{Fix}\,\theta)_0 \subset K \subset \mathrm{Fix}\,\theta$ を満たす G の対合とし，$\theta_{*e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の -1 に対する固有空間を $\mathfrak{p}$ と表す．ここで，$\mathrm{Fix}\,\theta$ は，θ の固定点集合を表し，$(\mathrm{Fix}\,\theta)_0$ はその単位元 e の連結成分を表す．このとき，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が成り立つ．この分解は標準分解とよばれる．$\mathfrak{p}$ は，G から G/K への自然な射影 π の e における微分 π_{*e} を通じて $T_o(G/K)$ $(o := eK)$ と同一視される．$f : M \hookrightarrow G/K$ を全測地的はめ込み写像とする．ここで，M は，誘導計量に関して完備であるとする．このとき，M は (誘導計量に関して) 対称空間になる．それゆえ，M は，ある対称対 (H, L) を用いて，$M = H/L$ と表される．$\mathfrak{h}, \mathfrak{l}$ を，各々，H, L のリー代数とし，$\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$ を標準分解とする．このとき，f は H 同変である，つまり，単射準同型写像 $\iota : H \hookrightarrow G$ で $f(h \cdot x) = \iota(h) \cdot f(x)$ $(x \in M,\ h \in H)$ を満たすようなものが存在することが示される．H^s を H の半単純部分とし，$L^s := L \cap H^s$ とおく．また，L^s_0 を L^s の単位元の連結成分とする．$\mathfrak{h}^s = \mathfrak{l}^s + \mathfrak{m}^s$ を対称空間 $\widehat{M} := H^s/L^s_0$ の標準分解とする．$\widehat{M}$ は，$M = H/L = H^s/L^s$ の被覆空間であることを注意しておく．$\mathfrak{q} := \mathfrak{g} \ominus \iota_*(\mathfrak{h})$ とおき，$\rho_{G/\iota(H)} : H^s \to O(\mathfrak{q})$ を $G/\iota(H)$ のイソトロピー表現の H^s への制限とする．$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{q}_k$ を表現 $\rho_{G/\iota(H)}$ の既約分解とする．このとき，$\iota(L) \subset K$ $(\iota_*(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{k})$，及び，$\iota_*(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{p}$ が示される．$\mathfrak{m}^\perp := \mathfrak{p} \ominus \iota_*(\mathfrak{m})$ とおく．$\iota_*(\mathfrak{m})$ は T_oM と同一視され，$\mathfrak{m}^\perp$ は $T^\perp_o M$ と同一視される．また，$\mathfrak{m}^\perp_i := \mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{q}_i$ とおく．このとき，$\mathfrak{m}^\perp \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ が示される．表現 $\sigma : L^s_0 \to O(\mathfrak{m}^\perp)$ を $\sigma := (\rho_{G/\iota(H)}|_{\iota(L^s_0)})|_{\mathfrak{m}^\perp}$ によって定義する．一方，$\rho^S_o : L^s_0 \to O(T^\perp_o M)$ を $\iota(H) \curvearrowright G/K$ の o におけるスライス表現とする．同一視 $T^\perp_o M = \mathfrak{m}^\perp$ の下，σ と ρ^S_o は同一視される．

$\widetilde{g}$ を G/K のリーマン計量，B を $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積で $B|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = \widetilde{g}_o$ となるようなものとする．H^s の有限次元既約複素表現の同値類の全体を $D(H^s)$ で表し，$(\rho_{G/\iota(H)}|_{\mathfrak{q}_i})^{\mathbb{C}}$ の同値類を μ_i で表す．また，$\lambda \in D(H^s)$ に属する元の $B|_{\mathfrak{h}^s\times\mathfrak{h}^s}$ に関する Casimir 作用素の固有値を a_λ で表し，$(D_{G/H})_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ を $(D_{G/H})_i := \{\lambda \in D(H^s) \,|\, a_\lambda > a_{\mu_i}\}$ によって定義する．1987 年，大仁田先生は，体積汎関数の臨界点であるコンパクト対称空間内の全測地的部分多様体における指数公式を示した．



$$\begin{tikzcd}
H^s \arrow[r, bend left, "\rho_{G/\iota(H)}"] & \mathfrak{q} \\
\cup & \bigcup \\
L^s \arrow[rd, bend left, "\sigma"'] & \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q} \\
 & \bigcup \\
 & \mathfrak{m}^\perp
\end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd} L_0^s \arrow[r] \arrow[dr, "\rho_o^S"'] & T_o(G/K)=\mathfrak{p} \arrow[d, phantom, "\bigcup"] \\ & T_o^\perp M=\mathfrak{m}^\perp \end{tikzcd}$$

定理 1.5(大仁田の指数公式 [O]). G/K の全測地的部分多様体 M の体積汎関数の臨界点としての指数 $i(M)$ は，次式によって与えられる：

$$i(M)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\lambda\in(D_{G/H})_i} m_\lambda\cdot\dim\mathrm{Hom}_{L_0^s}(V_{\rho_\lambda},(\mathfrak{m}_i^\perp)^{\mathbb{C}}).$$

ここで，$(\mathfrak{m}_i^\perp)^{\mathbb{C}}$ は表現 $\sigma^{\mathbb{C}}|_{(\mathfrak{m}_i^\perp)^{\mathbb{C}}}(=(\rho_o^S)^{\mathbb{C}}|_{(\mathfrak{m}_i^\perp)^{\mathbb{C}}})$ の定める L_0^s 加群を表し，V_{ρ_λ} は $\lambda\in D(H^s)$ に属する表現 ρ_λ の定める L_0^s 加群を表し，m_λ は V_{ρ_λ} の次元を表す．

ここで，この指数公式を用いた応用結果について，紹介する．大仁田先生 ([O]) は，同論文において，すべての既約コンパクト型対称空間内の Helgason 球面は，安定的 (stable) であることを示し，また，階数 1 コンパクト型対称空間内のすべてのコンパクト全測地的部分多様体の指数を決定した．1995 年，田中真紀子氏 ([T]) は，すべての既約コンパクト型対称空間内の極 (polar) と中心体 (meridian) の安定性を決定した．2009 年，木村太郎氏と田中真紀子氏 ([KT]) は，すべての階数 2 の単連結既約コンパクト型対称空間内の極大な全測地的部分多様体の安定性を決定した．

G/K をコンパクト型対称空間とし，H を G の対称部分群，つまり，ある G の対合 τ に対し，$(\mathrm{Fix}\,\tau)_0\subset H\subset\mathrm{Fix}\,\tau$ となるような部分群とする．自然な作用 $H\curvearrowright G/K$ は，**Hermann 作用**とよばれる．今回，Hermann 作用のある種の条件を満たす軌道が (全測地的でない) 極小部分多様体になることを示し，さらに，それらの極小軌道に対し，上述の指数公式と同種の指数公式が成り立つことを示した (第 4 節参照)．

2 基本概念および基本的事実

最初に，リーマン多様体へのはめ込み写像の空間上の体積汎関数に対する第 2 変分公式を思い起こすことにする．(M,g) をコンパクトリーマン多様体，$(\widetilde{M},\widetilde{g})$ をリーマン多様体とし，$f:(M,g)\hookrightarrow(\widetilde{M},\widetilde{g})$ を極小等長はめ込みとする．∇ を g のリーマン接続とし，A, $\nabla^\perp$ を f の形テンソル, 法接続とする．$\{f_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ を M から $\widetilde{M}$ へのはめ込みの C^∞ 族で $f_0=f$ となるようなものとし，$F:M\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\widetilde{M}$ を $F(x,t):=f_t(x)$ $((x,t)\in M\times(-\varepsilon,\varepsilon))$ によって定義する．$\triangle^\perp:\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M)$ を，∇, $\nabla^\perp$ を用いて定義されるラフラプラス作用素とし，$\mathcal{A}:\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M)$，$\mathcal{R}:\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M)$ を，各々，$g(\mathcal{A}(v),w)=\mathrm{Tr}(A_v\circ A_w)$，$g(\mathcal{R}(v),w)=-\mathrm{Tr}(R(\cdot,v)w)$ $(v,w\in\Gamma(T^\perp M))$ によって定義する．このとき，次の第 2 変分公式が，J. Simons によって示された．

定理 2.1(第 2 変分公式 [S])

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\mathrm{Vol}(M,f_t^*\widetilde{g})=\int_M\widetilde{g}\left(\mathcal{J}\left(F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\right)_\perp\right),F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\right)_\perp\right)dv_g.$$

ここで，$\mathcal{J}\,(:\Gamma(T^\perp M)\to\Gamma(T^\perp M))$ は，$\mathcal{J}:=-\triangle^\perp+\mathcal{R}-\mathcal{A}$ によって与えられるヤコビ作用素を表す．

$E_\lambda^\perp:=\{v\in\Gamma(T^\perp M)\,|\,\mathcal{J}(v)=\lambda v\}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ とおく．このとき，$\dim\bigoplus_{\lambda<0}E_\lambda^\perp$ は，Vol の臨界点 f の指数を表し，$\dim E_0^\perp$ は，その退化次数を表す．

次に，簡約等質空間に付随する主バンドルの標準接続，及び，それに付随する概念，事実について思い起こすことにする．H/L を簡約等質空間とし，$\pi:H\to H/L$ を自然な射影とする．これは，L バンドル

とみなされる．$\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$ を簡約分解，つまり，$[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ を満たす分解とする．$\mathfrak{m}$ は $T_{eL}(H/L)$ と同一視される．L バンドル $\pi : H \to H/L$ の接続 ω で，任意の $X \in \mathfrak{m}$ と任意の $h \in H$ に対し，$t \mapsto (\exp tX)(h)$ が ω に関する水平曲線になるようなものは，一意に存在する．この接続 ω は，L バンドル $\pi : H \to H/L$ の**標準接続**とよばれる．B を $\mathfrak{h}$ の $\mathrm{Ad}(H)$ 不変な内積で $B(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}) = 0$ を満たすようなものとし，g_B を H/L 上の H 不変なリーマン計量で $(g_B)_{eL} = B|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}$ となるようなものとし，∇^B を g_B のリーマン接続とする．$\sigma : L \to U(W)$ を L のユニタリー表現とし，$E_\sigma := H \times_{\sigma(L)} W$ を $\pi : H \to H/L$ の σ に関する同伴複素ベクトルバンドルとする．$C^\infty(H, W)_\sigma$ を

$$C^\infty(H, W)_\sigma := \{f \in C^\infty(H, W) \,|\, f(hl) = \sigma(l^{-1})f(h) \quad (\forall\, h \in H, \forall\, l \in L)\}$$

によって定義し，$\Psi : \Gamma(E_\sigma) \underset{\cong}{\longrightarrow} C^\infty(H, W)_\sigma$ を

$$\Psi(\xi)(h) = h^{-1} \cdot \xi_{\pi(h)} \qquad (\xi \in \Gamma(E_\sigma),\, h \in H)$$

によって定義する．ここで，h は，$h(w) := [(h, w)]$ $(w \in W)$ によって定義される W から $(E_\sigma)_{\pi(h)}$ への線形同型写像を表す．$\mathcal{C}_H$ $(: C^\infty(H, W) \to C^\infty(H, W))$ を，H の (B に関する) Casimir 微分作用素，つまり，$\mathcal{C}_H(f) = \sum\limits_{i=1}^{m} \widetilde{e}_i(\widetilde{e}_i f)$ とする．ここで，$(e_1, \cdots, e_m)$ は，$\mathfrak{h}$ の B に関する正規直交基底を表し，また，$\widetilde{e}_i$ は $(\widetilde{e}_i)_e = e_i$ となる左不変ベクトル場を表す．$\mathcal{C}_\sigma$ を σ の $B|_{\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}}$ に関する Casimir 作用素，つまり，$\mathcal{C}_\sigma := \sum_{i=1}^{m} \sigma_{*e}(e_i)^2$ とする．∇^ω を ω の定める E_σ の接続とし，$\triangle^{E_\sigma}$ を ∇^B, ∇^ω を用いて定義される E_σ のラフラプラス作用素とする．$\widetilde{\triangle^{E_\sigma}} := \Psi \circ \triangle^{E_\sigma} \circ \Psi^{-1}$ とおく．

事実 2.2([O]) $\widetilde{\triangle^{E_\sigma}} f = \mathcal{C}_H(f) - \mathcal{C}_\sigma \circ f \quad (f \in C^\infty(H, W)_\sigma)$

3 大仁田の指数公式の証明の概略

この節において，定理 1.5 の種名の概略を述べる．第 1,2 節における notation を用いることにする．ψ を $\widehat{M}$ から M への被覆写像とし，$\widetilde{f} := f \circ \psi$ とおく．$\widetilde{f}^*\widetilde{g}$ を g_I で表し，$B|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}$ の定める $\widehat{M}$ の G 不変リーマン計量を g_B で表す．また，g_I, g_B のリーマン接続を，各々，∇^I, ∇^B で表す．

[Step I] $\mathcal{J}$ を $\mathcal{C}_{H^s}$ と $\mathcal{C}_{\rho_{G/\iota(H)}}$ を用いて記述する．

最初に，次の事実を示す．

補題 3.1. ある正の数 c に対し，

$$B|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}} = c(g_I)_o \quad (o := eL_0^s)$$

が成り立つ．それゆえ，$\nabla^B = \nabla^I$ が成り立つ．

$H^s \to H^s/L_0^s (= \widehat{M})$ の標準接続 ω の定める $E_\sigma (= T^\perp\widehat{M})$ の接続を ∇^ω で表し，部分多様体 $f \circ \psi : \widehat{M} \hookrightarrow G/K$ の法接続を $\nabla^\perp$ で表すことにする． このとき，次の事実が示される．

補題 3.2. $\nabla^\perp = \nabla^\omega$ が成り立つ．

$\triangle^\perp$ を ∇^I, $\nabla^\perp$ の定める $T^\perp\widehat{M}$ のラフラプラス作用素とし，$\triangle^{E_\sigma}$ を ∇^B, ∇^ω の定める E_σ のラフラプラス作用素とする．補題 3.1, 3.2 から，次が示される．

補題 3.3. $\triangle^\perp = \triangle^{E_\sigma}$ が成り立つ．

$\widetilde{\triangle^\perp} := \Psi \circ \triangle^\perp \circ \Psi^{-1}$ とおく．事実 2.1 と補題 3.3 を用いて，次の事実が示される．

命題 3.4. $\widetilde{\triangle^\perp} f = \mathcal{C}_{H_s}(f) - \mathcal{C}_\sigma \circ f \quad (f \in C^\infty(H^s, \mathfrak{m}^\perp)_\sigma)$ が成り立つ．

$\widetilde{\mathcal{A}} := \Psi\circ\mathcal{A}\circ\Psi^{-1}$，$\widetilde{\mathcal{R}} := \Psi\circ\mathcal{R}\circ\Psi^{-1}$ とおく．$(e_1,\cdots,e_m)$ を $\mathfrak{h}^s$ の $B|_{\mathfrak{h}^s\times\mathfrak{h}^s}$ に関する正規直交基底で $e_1,\cdots,e_n\in\mathfrak{m}$，$e_{n+1},\cdots,e_m\in\mathfrak{l}^s$ となるようなものとする．

補題 3.5. $\mathcal{C}_\sigma = \sum_{i=n+1}^{m}(\rho_{G/H})_*(e_i)^2|_{\mathfrak{m}^\perp}$，及び，$\widetilde{\mathcal{R}}-\widetilde{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^{n}(\rho_{G/H})_*(e_i)^2$ が成り立つ．

命題 3.4，補題 3.5 を用いて，次の事実が示される．

補題 3.6. $\widetilde{\mathcal{J}}(f) = -\mathcal{C}_{H_s}(f)+\mathcal{C}_{\rho_{G/H}}\circ f = -\mathcal{C}_{H_s}(f)+a_{\mu_i}f \quad (f\in C^\infty(H^s,\mathfrak{m}_i^\perp)_\sigma)$ $(i=1,\cdots,k)$ が成り立つ．

[Step II] $C^\infty(H,\mathfrak{m}^\perp)_\sigma$ を $\widetilde{\mathcal{J}}$ の固有空間の直和に分解する．

$E_{\sigma^{\mathbb{C}}} := H\times_{\sigma^{\mathbb{C}}(L_0^s)}(\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}}(=(T^\perp\widehat{M})^{\mathbb{C}})$ とおく．これは，$(T^\perp M)^{\mathbb{C}}$ と同一視される．また，$\Psi^{\mathbb{C}}:\Gamma(E_{\sigma^{\mathbb{C}}}) = \Gamma((T^\perp\widehat{M})^{\mathbb{C}}) \underset{\cong}{\longrightarrow} C^\infty(H^s,(\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbf{c}})_{\sigma^{\mathbb{C}}}$ を前節の Ψ と同様に定義する．$\lambda(=[\rho_\lambda])\in D(H^s)$ に対し，
複素線形写像 $\eta_{\rho_\lambda}: V_{\rho_\lambda}\otimes\mathrm{Hom}_{L_0^s}(V_{\rho_\lambda},(\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}}) \;\to\; C^\infty(H^s,(\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}})_{\sigma^{\mathbb{C}}}$ を

$$(\eta_{\rho_\lambda}(v\otimes\phi))(h) := \phi(\rho_\lambda(h^{-1})(v)) \quad (v\in V_{\rho_\lambda},\ \phi\in\mathrm{Hom}_{L_0^s}(V_{\rho_\lambda},(\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}}),\ h\in H^s)$$

によって定義する．η_{ρ_λ} は，単射であることが示される．$\Gamma_{\lambda,i}((T^\perp M)^{\mathbb{C}})$ $(i=1,\cdots,k)$ を

$$\Gamma_{\lambda,i}((T^\perp M)^{\mathbb{C}}) := (\Psi^{\mathbb{C}})^{-1}(\eta_{\rho_\lambda}(V_{\rho_\lambda}\otimes\mathrm{Hom}_{L_0^s}(V_{\rho_\lambda},(\mathfrak{m}_i^\perp)^{\mathbb{C}})))$$

によって定義する．Peter-Weyl の定理と Frobenius の相互律を用いて，次の事実が示される．

命題 3.7. $\bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{\lambda\in D(H^s)}\Gamma_{\lambda,i}((T^\perp M)^{\mathbb{C}})$ は，一様位相に関して $\Gamma((T^\perp M)^{\mathbb{C}})$ において稠密である．

一方，$\mathcal{C}_{H^s}(f) = a_\lambda f \quad (f\in\Psi^{\mathbb{C}}(\Gamma_{\lambda,i}((T^\perp M)^{\mathbb{C}})))$ が示され, 補題 3.6 と共に次の事実が導出される．

命題 3.8 $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}|_{\Gamma_{\lambda,i}((T^\perp M)^{\mathbb{C}})} = (a_{\mu_i}-a_\lambda)\mathrm{id}$ が成り立つ．

$\dim\Gamma_{\lambda,i}((T^\perp M)^{\mathbb{C}}) = m_\lambda\cdot\dim\mathrm{Hom}_{L_0^s}(V_{\rho_\lambda},(\mathfrak{m}_i^\perp)^{\mathbb{C}})$ なので，上述の 2 つの事実から，大仁田の指数公式が導かれる． □

4 Hermann 作用の特別な極小軌道

G/K をコンパクト型対称空間とし，H を G の対称部分群，つまり，ある G の対合 τ に対し，$(\mathrm{Fix}\,\tau)_0\subset H\subset\mathrm{Fix}\,\tau$ となるような部分群とする．$\mathfrak{k}:=\mathrm{Lie}\,K$，$\mathfrak{h}:=\mathrm{Lie}\,H$ とする．θ を G の対合で $(\mathrm{Fix}\,\theta)_0\subset K\subset\mathrm{Fix}\,\theta$ を満たすものとする．簡単のため，θ_{*e}，τ_{*e} も，各々，θ,τ で表すことにする．$\mathfrak{p}:=\mathrm{Ker}(\theta+\mathrm{id})$, $\mathfrak{q}:=\mathrm{Ker}(\sigma+\mathrm{id})$ とおく．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$ が成り立つ．以下,「$\theta\circ\sigma=\sigma\circ\theta$，かつ，$G/H$ が既約である」と仮定する．このとき，$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ が成り立つ．$\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分代数とし，各 $\beta\in\mathfrak{b}^*$ に対し，$\mathfrak{p}_\beta:=\{X\in\mathfrak{p}\,|\,\mathrm{ad}(b)^2(X)=-\beta(b)^2X\ (\forall b\in\mathfrak{b})\}$ とおき，$\triangle'$ を $\triangle':=\{\beta\in\mathfrak{b}^*\setminus\{0\}\,|\,\mathfrak{p}_\beta\neq\{0\}\}$ によって定義する．$\triangle'$ は，$(\mathrm{Span}\,\triangle'\,(\subset\mathfrak{b}^*)$ において$)$ ルート系になる．また，${\triangle'}_+^V$, ${\triangle'}_+^H$ を，各々，

$${\triangle'}_+^V := \{\beta\in\triangle'_+\,|\,\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{q}\neq\{0\}\},\qquad {\triangle'}_+^H := \{\beta\in\triangle'_+\,|\,\mathfrak{p}_\beta\cap\mathfrak{h}\neq\{0\}$$

によって定義する．これらを用いて，$\mathfrak{b}$ 内の領域 C を

$$C := \{b\in\mathfrak{b}\,|\,0<\beta(b)<\pi\,(\forall\beta\in{\triangle'}_+^V),\ -\frac{\pi}{2}<\beta(b)<\frac{\pi}{2}\,(\forall\beta\in{\triangle'}_+^H)\}.$$

によって定義する．これは，単体複体になる．Exp を G/K の $o(=eK)$ における指数写像とする．このとき，$\overline{C}$ の各単体 σ に対し，$\mathrm{Exp}(\sigma)$ を通る極小な H 軌道はただ一つ存在することが示される．σ が $\overline{C}$

の頂点でない場合，$\mathrm{Exp}(\sigma)$ を通る極小な H 軌道は不安定である．$Z_0 \in \mathfrak{b}$ に対し，$M := H \cdot \mathrm{Exp}\, Z_0$ が極小軌道になる場合，この軌道に対し，大仁田の指数公式と同種の指数公式が成り立つためには，下記の 3 条件 (I)∼(III) が成り立つことが必要十分条件であることが前節の定理 1.5 の証明よりわかる．

条件 (I) $M = H/L$ $(L := H_{\mathrm{Exp}\, Z_0})$ が簡約リーマン等質空間，つまり，$\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}_{\mathfrak{h}}$ が簡約分解になる．

条件 (II) ある正の数 c に対し，$B|_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{h}} \times \mathfrak{m}_{\mathfrak{h}}} = c(g_I)_o$ となる．

$\mathfrak{m} := (\exp Z_0)^{-1}_{*e}(T_{\mathrm{Exp}\, Z_0} M)$ $(\subset \mathfrak{p})$ とし，$\mathfrak{m}^{\perp} := (\exp Z_0)^{-1}_{*e}(T^{\perp}_{\mathrm{Exp}\, Z_0} M)$ $(\subset \mathfrak{p})$ とする．このとき，$\mathrm{Ad}(\exp Z_0)(\mathfrak{m}^{\perp}) \subset \mathfrak{q}$ が示される．$\widehat{\mathfrak{m}}^{\perp} := \mathrm{Ad}(\exp Z_0)(\mathfrak{m}^{\perp})$ $\rho_{G/H} : H^s \to O(\mathfrak{q})$ を G/H のイソトロピー表現の H^s への制限とし，$\sigma_{Z_0} := (\rho_{G/H}|_{L_0^s})|_{\widehat{\mathfrak{m}}^{\perp})} : L_0^s \to O(\widehat{\mathfrak{m}}^{\perp})$ とおく．$E_{\sigma_{Z_0}} := H \times_{\sigma_{Z_0}(L_0^s)} \widehat{\mathfrak{m}}^{\perp} (= T^{\perp}\widehat{M})$ $(\widehat{M} := H^s/L_0^s)$ ω を $H^s \to H^s/L_0^s$ の標準接続とし，∇^{ω} を ω の定める $E_{\sigma_s} = T^{\perp}\widehat{M}$ の接続とする．また，$\nabla^{\perp}$ を部分多様体 $f \circ \psi : \widehat{M} \hookrightarrow G/K$ の法接続とする．

条件 (III) $\nabla^{\perp} = \nabla^{\omega}$ が成り立つ．

しかしながら，つぎの事実を示すことができる．

事実 4.1. 任意の $Z_0 \in \mathfrak{b}$ に対し，条件 (I) と (III) は成り立つ．

よって，$H \cdot \mathrm{Exp}\, Z_0$ が極小部分多様体になり，かつ，条件 (II) を満たすような $Z_0 \in \mathfrak{b}$ をみつければよい．${\triangle'}^V_{Z_0}$ と ${\triangle'}^H_{Z_0}$ を

$$ {\triangle'}^V_{Z_0} := \{\beta \in {\triangle'}^V_+ \,|\, \beta(Z_0) \equiv 0 \pmod{\pi}\}, \quad {\triangle'}^H_{Z_0} := \{\beta \in {\triangle'}^H_+ \,|\, \beta(Z_0) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\} $$

によって定義する．このとき，$M = H \cdot \mathrm{Exp}\, Z_0$ の平均曲率ベクトル場 $\mathcal{H}$ について，次が成り立つ：

$$ (\exp Z_0)^{-1}_{*}(\mathcal{H}_{\mathrm{Exp}\, Z_0}) = -\sum_{\beta \in {\triangle'}^V_+ \setminus {\triangle'}^V_{Z_0}} \frac{m^V_{\beta}}{\tan \beta(Z_0)} \beta^{\sharp} + \sum_{\beta \in {\triangle'}^H_+ \setminus {\triangle'}^H_{Z_0}} m^H_{\beta} \cdot \tan \beta(Z_0) \cdot \beta^{\sharp}. $$

命題 4.2([K3]). $H \cdot \mathrm{Exp}\, Z_0$ が極小部分多様体となるための必要十分条件は，

$$ \sum_{\beta \in {\triangle'}^V_+ \setminus {\triangle'}^V_{Z_0}} \frac{m^V_{\beta}}{\tan \beta(Z_0)} \beta^{\sharp} = \sum_{\beta \in {\triangle'}^H_+ \setminus {\triangle'}^H_{Z_0}} m^H_{\beta} \cdot \tan \beta(Z_0) \cdot \beta^{\sharp} $$

が成り立つことである．

容易に，次が成り立つことが示される：

$$ \begin{aligned} \mathfrak{l} &= \mathfrak{z}_{\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}}(\mathfrak{b}) + \sum_{\beta \in {\triangle'}^V_{Z_0}} (\mathfrak{k}_{\beta} \cap \mathfrak{h}) + \sum_{\beta \in {\triangle'}^H_{Z_0}} (\mathfrak{p}_{\beta} \cap \mathfrak{h}) \\ \mathfrak{m}_{\mathfrak{h}} &= \mathfrak{z}_{\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}}(\mathfrak{b}) + \sum_{\beta \in {\triangle'}^V_+ \setminus {\triangle'}^V_{Z_0}} (\mathfrak{k}_{\beta} \cap \mathfrak{h}) + \sum_{\beta \in {\triangle'}^H_+ \setminus {\triangle'}^H_{Z_0}} (\mathfrak{p}_{\beta} \cap \mathfrak{h}). \end{aligned} $$

被覆写像 $\psi : H^s/L_0^s \to M$ を $\psi(hL_0^s) := h \cdot \mathrm{Exp}\, Z_0$ $(hL_0^s \in H^s/L_0^s)$ によって定義する．このとき，次の事実が示される．

事実 4.3([K3]). (i) $(\psi^* g_I)_{eL} = |\cos \beta(Z_0)| \cdot B|_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{h}} \times \mathfrak{m}_{\mathfrak{h}}}$ on $\mathfrak{p}_{\beta} \cap \mathfrak{h}$ $\quad (\forall\, \beta \in {\triangle'}^V_+ \setminus {\triangle'}^V_{Z_0})$.

(ii) $(\psi^* g_I)_{eL} = |\sin \beta(Z_0)| \cdot B|_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{h}} \times \mathfrak{m}_{\mathfrak{h}}}$ on $\mathfrak{k}_{\beta} \cap \mathfrak{h}$ $\quad (\forall\, \beta \in {\triangle'}^H_+ \setminus {\triangle'}^H_{Z_0})$.

それゆえ，次の事実が示される．

命題 4.4([K3]). Z_0 が条件 (II) を満たすための必要十分条件は，

$$|\cos\,\beta_1(Z_0)| = |\sin\,\beta_2(Z_0)| = c \quad (\forall\,\beta_1 \in \triangle'^V_+ \setminus \triangle'^V_{Z_0},\ \forall\,\beta_2 \in \triangle'^H_+ \setminus \triangle'^H_{Z_0}).$$

事実 4.1, 命題 4.2, 4.4 から，次の主張が導出される．

定理 4.5([K3]). $Z_0 \in \mathfrak{b}$ が次の 2 条件を満たしているとする．

(極小条件) $$\sum_{\beta \in \triangle'^V_+ \setminus \triangle'^V_{Z_0}} \frac{m^V_\beta}{\tan\,\beta(Z_0)} \beta^\sharp = \sum_{\beta \in \triangle'^H_+ \setminus \triangle'^H_{Z_0}} m^H_\beta \cdot \tan\,\beta(Z_0) \cdot \beta^\sharp.$$

(2 種の内積の相似性条件) ある定数 c に対し，$|\cos\,\beta_1(Z_0)| = |\sin\,\beta_2(Z_0)| = c$ $(\forall\,\beta_1 \in \triangle'^V_+ \setminus \triangle'^V_{Z_0}, \forall\,\beta_2 \in \triangle'^H_+ \setminus \triangle'^H_{Z_0})$.

このとき，$H \cdot \mathrm{Exp}\,Z_0$ は極小軌道になり，次の指数公式が成り立つ：

$$i(M) = \sum_{\lambda \in D_{G/H}} m_\lambda \cdot \dim \mathrm{Hom}_{L^s_0}(V_{\rho_\lambda}, (\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}}).$$

ここで，μ は，$(\rho_{G/H}|_{\mathfrak{q}})^{\mathbb{C}}$ の同値類を表し，$D_{G/H}$ は，$D_{G/H} := \{\lambda \in D(H^s) \,|\, a_\lambda > a_\mu\}$ によって定義される．

この定理の 2 条件を満たす Hermann 作用の軌道を，組織的にみつけることができ，具体的に，上述の指数公式を用いて，それらの極小軌道の指数を計算することができる ([K3] を参照)．

参考文献

[S] J. Simons, Minimal varieties in riemannian manifolds, Ann. of Math. **88** (1968) 62-105.
[O] Y. Ohnita, On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces, Compositio Math. **64** (1987) 157-189.
[I1] O. Ikawa, Equivariant minimal immersions of compact Riemannian homogeneous spaces into compact Riemannian homogeneous spaces, Tsukuba J. Math. **17** (1993) 169-188.
[T] M.S. Tanaka, Stability of minimal submanifolds in symmetric spaces, Tsukuba J. Math. **19** (1995) 27-56.
[KT] T. Kimura and M.S. Tanaka, Stability of certain minimal submanifolds in compact symmetric spaces, Differential Geom. Appl. **27** (2009) 23-33.
[I2] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan **63** (2011) 79-139.
[K1] N. Koike, Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds, Asian J. Math. **15** (2011) 101-128.
[K2] N. Koike, Examples of certain kind of minimal orbits of Hermann actions, Hokkaido Math. J. **43** (2014) 21-42.
[K3] N. Koike, On the indices of minimal orbits of Hermann actions, Hokkaido Math. J. **44** (2015) 521-275.