ベクトル束の複素構造と球面への調和写像

守屋克洋　(筑波大学)

1　動機

[1] においてリーマン面から S^2 への調和写像に対してスペクトル曲線を定義している．これをどのようにより一般の場合に拡張できるか考える．結論を言うとスペクトル曲線はうまく定義できないが, その前の平坦接続の族を構成することろまではある程度可能である．

2　リーマン面から S^2 への調和写像

リーマン面から S^2 への調和写像の場合は次のようになる．$\mathbb{R}^4$ と四元数 $\mathbb{H}$ を同一視する．S^2 は $\mathbb{H}$ の虚部 $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ 内の原点中心で半径 1 の球面とする．このとき

$$S^2 = \{a \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H} : |a| = 1\} = \{a \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H} : a^2 = -1\}.$$

である．従って, S^2 の元の $\mathbb{H}$ への積は, $\mathbb{H}$ の複素構造とみなせる．さらに S^2 への写像は複素構造の集合への写像とみなせる．

Σ をリーマン面, J を Σ の複素構造と, Σ 上の一次微分形式 ω に対して, $*\omega = \omega \circ J$ と定義する．写像 $f\colon \Sigma \to S^2$ が調和写像であることと $d(f*df) = 0$ であることは同値である．実際, (x, y) をリーマン面の向きに適合した局所共形座標とすると

$$\begin{aligned}
&d(f*df) = df \wedge *df + f\,d*df,\\
&d*df = -(f_{xx} + f_{yy})dx \wedge dy,\\
&df \wedge *df = -(f_x^2 + f_y^2)dx \wedge dy = (|f_x|^2 + |f_y|^2)dx \wedge dy
\end{aligned}$$

である．一方, f が調和であることと, g のラプラシアン Δ_g に対して $\Delta_g f = |df|^2 f$ であることが同値であることはよく知られている．

$d(f*df) = 0$ という方程式を使うと次の二つが同値であることが容易に分かる．

1. 写像 $f\colon \Sigma \to S^2$ が調和写像である．

2.

$$\nabla^\lambda = d + \mu^L(-\Phi_f + (x+yf)\Phi_f),\ \Phi_f = \frac{1}{4}(*df + f\,df)$$

が Σ 上の（右）自明束 $\underline{\mathbb{H}}$ の四元数接続で平坦になることと $x^2+y^2=1$ であることが同値である.

ここで平坦接続の S^1 族が得られているが, この S^1 を $\mathbb{C}P^1$ 内の S^1 と思い, さらに $\mathbb{C}P^1$ を Q_1 と思って, そのアファイン座標を取ることによっって書き $\underline{\mathbb{H}}$ の右からの i 倍により左複素自明束 $\underline{\mathbb{C}^2}$ と思うことにより, f が調和写像であることと,

$$\nabla^\sigma = d - \Phi_f + \mu^R(\frac{\sigma+\sigma^{-1}}{2})\Phi_f + \mu^R(\frac{-\sigma+\sigma^{-1}}{2}i)f\Phi_f$$

が任意の $\sigma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ で平坦な $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 接続であることが同値になることがわかる. ここで μ^R は右からかけることを意味する.

スペクトル曲線とは $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の分岐被覆で, ∇^σ のホロノミー行列の固有直線束とそれらの 0, ∞ への極限が well-defined となるものであった.

3 Clifford 代数の場合

$\mathbb{H}$ の代わりに Clifford 代数 $\mathrm{C}\ell(V_r)$ （V_r は実 r 次元計量ベクトル空間）を使って同様なことが可能である ([2]). $e_1, \ldots, e_r$ を V_r の正規直交基底とする. α を $\alpha(v) = -v$ $(v \in V_r)$ から誘導される $\mathrm{C}\ell(V_r)$ の自己同型, $^\perp$ を $v^\perp = v$ から誘導される $\mathrm{C}\ell(V_r)$ の反自己同型とする. $Q(v) = \alpha(v)v^\perp$ により V_r のノルムが定義され, S^{r-1} を V_r の原点中心半径 1 の超球面とする. このとき,

$$S^{r-1} = \{v \in V_r : \alpha(v)^\top v = 1\} = \{v \in V_r : v^2 = -1\}$$

である. この場合も S^{r-1} は複素構造の集合と思うことができる. $\mathrm{C}\ell(V_r)$ を右からの e_1 の積で複素ベクトル空間と思う. すると次が同値であることが示される.

1. $f\colon \Sigma \to S^{r-1}$ は調和写像である.

2.

$$\nabla^\sigma = d - \Phi_f + \mu^R(\frac{\sigma+\sigma^{-1}}{2})\Phi_f + \mu^R(\frac{-\sigma+\sigma^{-1}}{2}e_1)f\Phi_f$$

は任意の $\sigma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ で平坦な $\mathrm{SL}(2^{r-1},\mathbb{C})$ 接続である.

スペクトル曲線を考えようとすると次元が高いことが災いして, 分岐被覆の分岐の仕方が複雑となり, S^2 への調和写像のようにはうまくいかない.

f の値域を V_r の外に広げることも可能である ([3]). この場合は積の零因子を含まないところに制限する.

4 展望

以上を踏まえると, 他の代数を使っても同様なことができそうである. 筆者の研究は曲面の研究への応用を意図したものであり, そちらの方向に研究を進めることは計画していない.

参考文献

[1] Ferus, D., Leschke, K., Pedit, F., Pinkall, U., Quaternionic holomorphic geometry: Plücker formula, Dirac eigenvalue estimates and energy estimates of harmonic 2-tori, Invent. Math. 146, 2001, 3, 507–593

[2] Kurosu, Sanae, Moriya, Katsuhiro, A tt^*-bundle associated with a harmonic map from a Riemann surface into a sphere, Differential Geom. Appl. 30, 2012, 3, 227–232.

[3] Moriya, Katsuhiro, Holomorphic structures for surfaces in Euclidean n-space, arXiv:1707.07246.