複素射影直線から階数２のグラスマン多様体への調和写像

長友　康行

1. 序章

本稿では、複素射影直線から階数 2 のグラスマン多様体への調和写像の分類問題に関する結果を紹介する。その証明は [3], [4] および [5] に詳述されている。

調和写像の研究に対して、ここではゲージ理論を用いた手法、特にベクトル束、およびその接続の理論を用いる。そのために 、$Gr_p(W)$ をベクトル空間 W 内の p 次元部分空間のなすグラスマン多様体とする。同語反復束は W をファイバーとする自明束の部分束とみなせるので、商束 $Q \to Gr_p(W)$ を考えることができる。この商束を**普遍商束**という。

W がエルミート内積を持つと仮定する。このとき、$Q \to Gr_p(W)$ にはファイバー計量と接続が定義される。

次に $f : M \to Gr_p(W)$ をリーマン多様体 M から $Gr_p(W)$ への写像とし、普遍商束の引き戻し束 $f^*Q \to M$ と $f^*Q \to M$ の切断に作用するラプラス作用素を考える。すると、球面への極小はめ込みに関する高橋の定理の一般化として、M から $Gr_p(W)$ への調和写像に関する特徴づけを得る (定理 2.1)。高橋の定理の一般化を利用して複素射影直線 $\mathbf{C}P^1$ から $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ や $Gr_n(\mathbf{C}^{n+2})$ への調和写像を分類する。

§3 では, $\mathbf{C}P^1$ から $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ への正則等長写像、およびケーラー角が一定の *Einstein-Hermitian* (EH) 調和写像を分類する (定理 3.2)。（EH 写像の定義は次章で与えられる。）一つの結果として、後者のモジュライ空間が同じ次数の正則等長写像のモジュライ空間と微分同相であることが判明する。

最終章では, $\mathbf{C}P^1$ から $Gr_n(\mathbf{C}^{n+2})$ への SU(2) 同変正則写像を問題とする。SU(2) 同変正則写像のモジュライ空間は開区間 $(0, c)$、もしくは疎な集合であることがわかる。ここで、c は写像の次数によって決定される正の実数である。

終域が $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ である場合にも定理 3.2 から、偶数次数の SU(2) 同変正則写像の一変数族が存在することがわかる。しかしながら、これら二つの同変正則写像には明確な違いが存在する。終域が $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ の場合には、$f^*Q \to \mathbf{C}P^1$ の誘導接続はゲージ変換の下、 同じ軌道に属している。ところが、終域が $Gr_n(\mathbf{C}^{n+2})$ である場合には、どの二つの誘導接続もゲージ同値ではない。実際、モジュライ空間 $(0, c)$ は $\mathbf{C}P^1$ の階数 2 の複素ベクトル束上の不変接続のゲージ変換を法としたモジュライ空間の部分集合とみなすこともできる。また、SU(2) 同変正則写像のモジュライ空間として現れる疎な集合はゲージ変換を法とする Yang-Mills 接続のモジュライ空間でもある。

最後にこれらの研究の共同研究者である古賀勇氏、高橋正郎氏および O.Macia 氏に感謝する。

2. 準備

本章の詳細に関しては [6] に譲る。

ベクトル空間 W の（向き付けられた）p 次元部分空間からなる実、もしくは複素グラスマン多様体を $Gr_p(W)$ と表すことにする。$S \to Gr_p(W)$ を同語反復束とする。$\underline{W} \to Gr_p(W)$ をファイバーが W である自明束とすると，単射準同型 $i_S : S \to \underline{W}$ が存在するので、商束 $Q \to Gr_p(W)$ と自然な射影 $\pi_Q : \underline{W} \to Q$ を得る。$Q \to Gr_p(W)$ を**普遍商束**という。

自然な射影 π_Q のため、W は $Q \to Gr_p(\mathbf{C}^N)$ の切断のなす空間 $\Gamma(Q)$ の部分空間とみなすことが可能となる。このとき、π_Q は *evaluation map* といわれる。また、（正則）接ベクトル束 $T \to Gr_p(W)$ は $S^* \otimes Q$ と同一視される。

次に W が（エルミート）内積を持つと仮定する。すると直交射影を考えることができるので、二つのベクトル束準同型を新たに定義することができる: $\pi_S : \underline{W} \to S, \quad i_Q : Q \to \underline{W}$。したがって $S, Q \to Gr_p(W)$ にはファイバー計量 h_S、h_Q が定義される。特に、接束にはリーマン計量が誘導される。

ベクトル束準同型 $i_Q : Q \to \underline{W}$ により、$Q \to Gr_p(W)$ の切断 t は W に値を持つ関数 $i_Q(t)$ とみなされる。その微分 $di_Q(t)$ は次のような分解を持つ:

$$di_Q(t) = \pi_S di_Q(t) + \pi_Q di_Q(t).$$

右辺第 2 項 $\pi_Q di_Q(t)$ は $Q \to Gr_p(W)$ 上の接続 ∇^Q を定義する。右辺第 1 項 $\pi_S di_Q(t)$ はベクトル束の**第 2 基本形式** K を定め、Kt と表記される [2]。K は $\mathrm{Hom}(Q, S) \cong Q^* \otimes S$ に値を持つ 1 形式となる。

同様にして $S \to Gr_p(W)$ 上には接続 ∇^S が定義され、第 2 基本形式 $H := \pi_Q di_S$ を得る。H は $\mathrm{Hom}(S, Q) \cong S^* \otimes Q$ に値を持つ 1 形式となる。

また Levi-Civita 接続は ∇^S と ∇^Q から誘導される接続と一致する。

$f : M \to Gr_p(W)$ をリーマン多様体 M からの写像とする。このとき、引き戻し束 $f^*Q \to M$ 上に誘導計量と誘導接続が定義される。また第 2 基本形式も引き戻されるが、これらは簡単のため同じ記号で表されるものとする：$H \in \Gamma(f^*T^* \otimes f^*S^* \otimes f^*Q)$、$K \in \Gamma(f^*T^* \otimes (f^*Q^* \otimes f^*S)$。$H$ と K を M 上の微分形式に制限すれば、H と K は $f^*S \to \underline{W}$ と $f^*Q \to \underline{W}$ に関する第 2 基本形式となる。ただし、ここでは $\underline{W} = M \times W$ である。

M を m 次元リーマン多様体とし、その局所直交枠を $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots m}$ とする。ベクトル束準同型 $A \in \Gamma\,(\mathrm{End}\, f^*Q)$ を第 2 基本形式の合成のトレースとして定義する：

$$A := \sum_{i=1}^{m} H_{e_i} K_{e_i}.$$

ベクトル束 $f^*Q \to M$ の準同型 $A \in \Gamma\,(\mathrm{End}\, f^*Q)$ は写像 $f : M \to Gr_p(W)$ の**平均曲率作用素**といわれる。また、誘導接続と M のリーマン構造を利用して定義される $\Gamma(f^*Q)$ に作用するラプラス作用素を Δ とおく。ここで、射影 $\underline{W} \to f^*Q$ は線形写像 $W \to \Gamma(f^*Q)$ を誘導することに注意する。

高橋の定理の一般化を紹介する。

定理 2.1. [6] $f : M \to Gr_p(W)$ をリーマン多様体 M から N 次元線形空間 W の p 次元部分空間のなすグラスマン多様体への写像とする。

このとき、次の二条件は同値である。

(1) $f : M \to Gr_p(W)$ は調和写像であり、かつ $A = -hId_{f^*Q}$ となる関数 h が存在する。

(2) ある関数 h が存在し、W の定義する任意の $f^*Q \to M$ の切断 t に対して $\Delta t = ht$ が成り立つ。

また、この二条件の下、$|df|^2 = (N-p)h$ が成り立つ。

グラスマン多様体への写像に対する二つの同値関係を導入する。

写像 $f_1 : M \to Gr_p(W)$ と $f_2 : M \to Gr_p(W)$ に対して、$Gr_p(W)$ の等長写像 ϕ が存在して $f_2 = \phi \circ f_1$ が成立するときに、f_1 と f_2 は**像同値**（または**合同**）といわれる。$Gr_p(W)$ の等長写像 ϕ は、ベクトル束 $Q \to Gr_p(W)$ の同型写像 $\tilde{\phi}$ を誘導することに注意する。

定義 2.2. 接続 ∇ を持つベクトル束 $V \to M$ を固定する。引き戻し束 $f^*Q \to M$ が $V \to M$ と同型になり、引き戻し接続が ∇ とゲージ同値になる写像 $f : M \to Gr_p(W)$ を考える。写像 f とベクトル束の同型 $\psi : V \to f^*Q$ の組 (f, ψ) に対して次の同値関係を定義する。

グラスマン多様体 $Gr_p(W)$ の等長写像 ϕ が存在して、$f_2 = \phi \circ f_1$ と $\psi_2 = \tilde{\phi} \circ \psi_1$ が成り立つときに、(f_1, ψ_1) と (f_2, ψ_2) は**ゲージ同値**であるといわれる。

階数 q のベクトル束 $V \to M$ と $\Gamma(V)$ の N 次元部分空間 W に対して、*evaluation map* を次のように定義する：

$$ev : M \times W \to V, \quad ev(x, t) := t(x), \quad x \in M, \, t \in W.$$

ev が全射であるときに、$f : M \to Gr_{N-q}(W)$ を

$$f(x) = \operatorname{Ker} ev_x, \quad x \in M,$$

と定義し、$(V \to M, W)$ による**誘導写像**と言うことにする。任意の写像 $f : M \to Gr_p(W)$ は $(f^*Q \to M, W)$ による誘導写像であることに注意する。

ベクトル束 $V \to M$ はファイバー計量を、W は内積を持つと仮定する。引き戻し束 $f^*Q \to M$ を自明束 $M \times W$ における $f^*S \to M$ の直交補ベクトル束とみなす。$(V \to M, W)$ による誘導写像に対して、$ev^* : V \to f^*Q$ を考える。ここで、ev^* は ev の随伴作用素をその終域を $f^*Q \to M$ と考えて得られる写像である。このとき、(f_1, ev_1^*) と (f_2, ev_2^*) がゲージ であるときに、誘導写像 f_1 と f_2 はゲージ同値であるという。

定義 2.3. 平均曲率作用素に対して、ある実数 μ が存在し、$A = -\mu Id_{f^*Q}$ をみたすときに、写像 $f : M \to Gr_p(W)$ は *Einstein-Hermitian* (EH) 写像といわれる。

本稿では、線形写像 $W \to \Gamma(f^*Q)$ が単射であるときに f を**充満**な写像ということにする。

3. 複素 2 次超曲面への調和写像

$\mathbf{C}P^{n+1}$ 内の（標準的な）複素 2 次超曲面を $\mathbf{R}^{n+2}$ の向き付けられた余次元が n の部分空間からなるグラスマン多様体 $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ とみなす。$\mathbf{R}^{n+2}$ の向きも固定すれば、普遍商束 $Q \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ は正則直線束となる。$Q \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ 上の標準接続の曲率形式を R^Q とおく。$Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ のケーラー形式 ω_n を、

$$R^Q = -2\pi\sqrt{-1}\omega_n,$$

が成立するように定める。

この場合の EH 調和写像は次のように特徴づけられる。

命題 3.1. [4] $f : M \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ を調和写像とし、$i : Gr_n(\mathbf{R}^{n+2}) \to \mathbf{C}P^{n+1}$ を標準的な埋め込みとする。このとき、f が *EH* 写像であることと合成写像 $i \circ f : M \to \mathbf{C}P^{n+1}$ が定エネルギー密度関数をもつ調和写像であることは同値な条件である。

次に $\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^1$ を次数が k の $\mathbf{C}P^1$ 上の正則直線束とし、標準計量と標準接続を持つものとする。$\mathbf{C}P^1$ のケーラー形式 ω と $\mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^1$ の標準接続の曲率 R_1 は

$$R_1 = -2\pi\sqrt{-1}\omega,$$

をみたすものとする。

SU(2) の標準表現空間を $\mathbf{C}^2$ とおき、$S^r\mathbf{C}^2$ を $\mathbf{C}^2$ の r 次対称積空間とする。このとき、$\Gamma(\mathcal{O}(k))$ は次のように分解される:

$$\Gamma(\mathcal{O}(k)) = \sum_{l=0}^{\infty} S^{|k|+2l}\mathbf{C}^2. \tag{1}$$

各成分 $S^{|k|+2l}\mathbf{C}^2$ は標準接続によるラプラス作用素の固有値 $2\pi\{2l(|k|+l+1)+|k|\}$ に対する固有空間となる。

$f : \mathbf{C}P^1 \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ に対して、引き戻し束 $f^*Q \to \mathbf{C}P^1$ は引き戻し接続から誘導される正則直線束としての構造を持つ。したがってある整数 k が存在して、 正則直線束としての同型 $f^*Q \cong \mathcal{O}(k)$ が成り立つ。この整数 k を写像 f の**次数**という。

$f : \mathbf{C}P^1 \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ を充満な EH 調和写像とし、定ケーラー角を持つとする。このとき、f の次数が k であるならば、

$$f^*\omega_n = k\omega$$

が成り立つ。故に $f^*Q \to \mathbf{C}P^1$ の引き戻し接続は $\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^1$ の標準接続とゲージ同値である。定理 2.1 より、$\mathbf{R}^{n+2}$ はラプラス作用素の固有空間の部分空間であることがわかる。したがって、非負整数 l が存在して $\mathbf{R}^{n+2} \subset S^{|k|+2l}\mathbf{C}^2$ が成り立つ。l を *Einstein-Hermitian* (EH) 定数という。再び定理 2.1 を利用すれば $|df|^2 = 4\pi\{2l(|k|+l+1)+|k|\}$ であることがわかるので、f のケーラー角を θ とおけば、

$$\cos\theta = \frac{k}{2\pi\{2l(|k|+l+1)+|k|\}}$$

が成り立つ。

$\mathbf{R}^{n+2}$ 内の向き付けられた n 次元部分空間の向きを逆向きにすることにより得られるグラスマン多様体の写像を $\tau : Gr_n(\mathbf{R}^{n+2}) \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ とおく。定義から $\tau : Gr_n(\mathbf{R}^{n+2}) \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ は等長写像となる。以下では $f : M \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ と合成写像 $\tau \circ f : M \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ を区別しない。

定理 3.2. [4] *写像 $f : \mathbf{C}P^1 \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ を定ケーラー角を持つ充満な EH 調和写像であるとする。また、その次数を k、EH 定数を l とする。このとき、*

$$n \le 2(|k|+2l)$$

が成り立つ。

次に $n = 2(|k|+2l)$ とし、$\mathcal{M}_{k,l}$ を上記性質を持つ写像のゲージ同値類によるモジュライ空間とする。

(1) *$\mathcal{M}_{k,l}$ は $\bigoplus_{r=l+1}^{2r \leqq |k|+2l} S^{2(|k|+2l-2r)}\mathbf{C}^2$ 内の有界な開凸体とみなすことが出来る。*
(2) *表現空間の直和に定義された標準内積（L_2 内積）から誘導された位相の下、$\mathcal{M}_{k,l}$ をコンパクト化した空間を $\overline{\mathcal{M}_{k,l}}$ とおく。$\overline{\mathcal{M}_{k,l}}$ の境界上の点は、ある全測地的部分多様体*

$$Gr_p(\mathbf{R}^{p+2}) \subset Gr_{2(|k|+2l)}(\mathbf{R}^{2(|k|+2l+1)}), \quad p < 2(|k|+2l)$$

と $Gr_p(\mathbf{R}^{p+2})$ への定ケーラー角を持つ充満な EH 調和写像を表す。

(3) 全測地的部分多様体 $Gr_p(\mathbf{R}^{p+2})$ は $(\mathbf{R}^{p+2})^{\perp} \subset \Gamma(Q)$ に属する $Q \to Gr_{2(|k|+21)}(\mathbf{R}^{2(|k|+2l+1)})$ の切断の共通零点となる。

$f^*Q \to \mathbf{C}P^1$ 上の標準接続のホロノミー群の構造群内での中心化群 S^1 は $\mathcal{M}_{k,l}$ に作用するので、次を得る。

定理 3.3. [4] $\mathbf{M}_{k,l}$ を次数 k、EH 定数 l の定ケーラー角をもつ充満な EH 調和写像 $\mathbf{C}P^1 \to Gr_{2(|k|+2l)}(\mathbf{R}^{2(|k|+2l+1)})$ の像同値類によるモジュライ空間とする。このとき、$\mathbf{M}_{k,l} = \mathcal{M}_{k,l}/S^1$ となる。

また、定理 3.2 から次を得る。

定理 3.4. [4] $\mathcal{M}_{k,0}$ と $\mathcal{M}_{k,l}$ は微分同相となる。

なお、定義により $\mathcal{M}_{k,0}$ は正則等長写像 $\mathbf{C}P^1 \to Gr_{2k}(\mathbf{R}^{2(k+1)})$ のゲージ同値類によるモジュライ空間である [5]。

4. 複素グラスマン多様体への同変正則写像

本節では $\mathbf{C}P^1$ から $\mathbf{C}^{n+2}$ 内の余次元 2 の部分空間からなる複素グラスマン多様体 $Gr_n(\mathbf{C}^{n+2})$ への同変正則写像の分類を紹介する。なお、§3 の記法を本節でも用いる。

$f : \mathbf{C}P^1 \to Gr_n(\mathbf{C}^{n+2})$ を SU(2) 同変な正則写像とする。すると $f^*Q \to \mathbf{C}P^1$ 上の引き戻し接続は SU(2) 不変接続となる。ω_n を $Gr_n(\mathbf{C}^{n+2})$ のケーラー形式とすると、その引き戻し $f^*\omega_n$ は $\mathbf{C}P^1$ の不変 2 形式となる。$f^*\omega_n$ は引き戻し束の第 1Chern 類を代表することに注意すれば、非負整数 k が存在して、$f^*\omega_n = k\omega$ が成り立つことがわかる。この k を f の**次数**という。そこで、$\mathbf{C}P^1$ 上の階数 2 のベクトル束上の不変接続を分類することにする。

そのために $\mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^1$ の $\mathcal{O}(-1) \to \mathbf{C}P^1$ によるベクトル束の**拡張**の概念を用いる。そのような拡張は拡張類といわれる $H^1\left(\mathbf{C}P^1; \mathcal{O}(1)^* \otimes \mathcal{O}(-1)\right) = H^1\left(\mathbf{C}P^1; \mathcal{O}(-2)\right)$ の元により一意的に定まる [1]。また Bott-Borel-Weil の定理から $H^1\left(\mathbf{C}P^1; \mathcal{O}(-2)\right) = \mathbf{C}$ であることがしたがう。したがって求める拡張類は $a \in \mathbf{C}$ と表され、ベクトル束の完全列を得る:

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to V_a \to \mathcal{O}(1) \to 0. \tag{2}$$

定義から $V_a \to \mathbf{C}P^1$ は $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1) \to \mathbf{C}P^1$ から誘導される非自明な SU(2) 作用を持つ。このとき、拡張類によって得られる接続 ∇_a は不変接続となる。

拡張類 a に対して ∇_a は $\nabla_{|a|}$ とゲージ同値であることが示される。したがってゲージ同値を法として不変接続を分類する場合には、a は非負実数として一般性を失わない。正則直線束 $\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^1$ の標準接続は $\mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^1$ 上のただ一つの不変接続なので、$V_a(k) := V_a \otimes \mathcal{O}(k) \to \mathbf{C}P^1$ も ∇_a と標準接続から誘導された不変接続を持つ。この不変接続も ∇_a と表すことにする。

定理 4.1. [3] $V \to \mathbf{C}P^1$ を $\mathbf{C}P^1$ の SU(2) 作用の持ち上げとなる SU(2) 作用を持つ階数 2 の正則ベクトル束とする。$V \to \mathbf{C}P^1$ の正則ベクトル束としての構造が不変接続により誘導されているならば、V は標準接続を持つ二つの正則直線束の直和か、もしくは不変接続 ∇_a を持つ $V_a(k) \to \mathbf{C}P^1$ にゲージ同値である（$a \geqq 0$）。これらのベクトル束同型は群作用を保つようにとることができる。

SU(2) 表現空間 $S^k\mathbf{C}^2$ のユニタリー基底を w_p^k,（$p = 0, 1, \cdots, k$）と表す。定理 2.1 と定理 4.1 から次を得る。

定理 4.2. [3] $f : \mathbf{C}P^1 \to Gr_n(\mathbf{C}^{n+2})$ を充満な次数 l の同変正則埋め込みとする。このとき、$l > 0$ であり、次の三つの場合の内、一つが成立する。
(1) $n = l$ が成り立つ。さらに $k_1 + k_2 = l$ をみたす非負整数 k_1 と k_2 が存在し、$\mathbf{C}^{n+2}$ は SU(2) 表現空間として $S^{k_1}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k_2}\mathbf{C}^2$ と同一視される。写像 f は以下のように定義される f_{k_1,k_2} と像同値である。

$$f_{k_1,k_2}([g]) = gU_{k_1} \oplus gU_{k_2}, \quad U_{k_i} = Span\left\langle w_p^{k_i} \,\middle|\, 1 \leqq p \leqq k_i \right\rangle, i = 1, 2.$$

(2) $n = l$ が成り立つ。さらに $2k = l$ をみたす正整数 k と実数 $a \in (0, \sqrt{k+1})$ が存在して、以下をみたす。$\mathbf{C}^{n+2}$ は SU(2) 表現空間として $S^{k-1}\mathbf{C}^2 \oplus S^{k+1}\mathbf{C}^2$ と同一視される。写像 f は以下のように定義される f_a と像同値である。

$$\begin{aligned} f_a([g]) &= gU_a, \\ U_a = Span\Big\langle w_p^{k-1}, &w_q^{k+1}, -aw_0^{k-1} + \sqrt{k+1-a^2}\,w_1^{k+1} \\ &\Big| 1 \leqq p \leqq k-1,\ 2 \leqq q \leqq k+1 \Big\rangle. \end{aligned}$$

(3) $2n = l$ が成り立つ。さらに $2k = l$ をみたす正整数 k が存在し、$\mathbf{C}^{n+2}$ は SU(2) 表現空間として $S^{k+1}\mathbf{C}^2$ と同一視される。写像 f は以下のように定義される $f_{\sqrt{k+1}}$ と像同値である。

$$f_{\sqrt{k+1}}([g]) = gU, \quad U = Span\left\langle w_q^{k+1} \,\middle|\, 2 \leqq q \leqq k+1 \right\rangle.$$

注意. f_{k_1,k_2} と f_a $(a^2 \in [0, k+1])$ による普遍商束の引き戻し束はそれぞれ標準接続を持つ $\mathcal{O}(k_1) \oplus \mathcal{O}(k_2) \to \mathbf{C}P^1$、不変接続 ∇_a を持つ $V_a(k) \to \mathbf{C}P^1$ とゲージ同値である。

References

[1] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, "The Geometry of Four-Manifolds" Clarendon Press, Oxford (1990)

[2] S. Kobayashi, "Differential Geometry of Complex Vector Bundles", Iwanami Shoten and Princeton University, Tokyo (1987).

[3] I.Koga and Y.Nagatomo, *Equivariant holomorphic embeddings from the complex projective line into complex Grassmannian of* 2*-planes*, a preprint

[4] O.Macia, and Y.Nagatomo, *Moduli of Einstein-Hermitian harmonic mappings of projective lines into quadrics*, to appear in Annals of Global Analysis and Geometry

[5] O. Macia, Y. Nagatomo, M. Takahashi, *Holomorphic isometric embeddings of the projective line into quadrics*, Tohoku Math. J. **69** (2017), 525-545

[6] Y. Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmannian manifolds*, arXiv: mathDG/1408. 1504.

[7] T.Takahashi, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 380-385

[8] M. Takeuchi, *Modern spherical functions.*Translations of Mathematical Monographs, 135. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

明治大学理工学部
E-mail address: `yasunaga@meiji.ac.jp`