特殊ユニタリ群の Morse 関数

佐々木　優

1　動機

対称空間の特別なクラスである対称 R 空間では，対蹠集合とホモロジーに関係があることが竹内 [2] により示されている．その背景には以下がある．

リーマン対称対 (G, K) により G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の標準分解が K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ により $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ で与えられ，$\mathfrak{p}$ での線形イソトロピー軌道が $\mathfrak{p}$ 上の $\mathrm{Ad}(K)$-不変内積により対称空間になるときそのコンパクト対称空間を対称 R 空間という．この定義により，対称 R 空間はベクトル空間へ自然に埋め込まれているがこの埋め込みのことを標準埋め込みという．

一般にコンパクト多様体 M がベクトル空間 V へ埋め込まれれば，V 上の内積により M 上に高さ関数が定まる．Morse 関数の一般論からほとんどの高さ関数は Morse 関数になる．これは対称 R 空間の標準埋め込みでも成り立っているがこの埋め込みはいくつかのよい性質を持っている [3][7].

命題 1.1. 対称 R 空間の標準埋め込みは $\mathbb{Z}_2$-perfect である．また，高さ関数で Morse 関数になるものの臨界点集合は対称 R 空間上の大対蹠集合になる．

$\mathbb{Z}_2$-perfect であるとは高さ関数で与えられる Morse 関数の臨界点集合の元の個数が常に $\mathbb{Z}_2$-係数ホモロジーの Betti 数の総和と一致していることをいう．ここで，Chen-Nagano[1] により導入された対称空間上の対蹠集合の定義を確認しておく．

定義 1.2. 対称空間 M の部分集合 S が任意の $x, y \in S$ について $s_x(y) = y$ を満たすとき対蹠集合であるという．最大の元の個数を与える対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ．大対蹠集合の元の個数を M の 2-number といい $\#_2 M$ とかく．

こうして，対称 R 空間に関して以下の定理が得られる [2].

定理 1.3. 対称 R 空間 M に関して，$\#_2 M = \sum_i \mathrm{dim} H_i(M; \mathbb{Z}_2)$.

ここまで，対称 R 空間に関して対蹠集合と $\mathbb{Z}_2$-係数ホモロジーの関係をみてきたが，対称 R 空間でなくても定理 1.3 と同じことが成り立つような場合が存在する [5][6].

例 1.4. $SU(n)$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数コホモロジーは $H^*(SU(n); \mathbb{Z}_2) \cong \wedge(e_3, e_5, \cdots, e_{2n-1})(e_i \in H^i)$ で与えられるので，$\mathrm{dim} H_*(SU(n); \mathbb{Z}_2) = 2^{n-1}$ である．

また, $SU(n)$ の大対蹠集合は $\left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon_n \end{pmatrix} ; \begin{matrix} \epsilon_i = \pm 1 \\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1 \end{matrix} \right\}$ で与えられるので $\#_2 SU(n) = 2^{n-1}$.

例 1.5. n を奇数とする.

シンプレクティック群 $Sp(n)$ をその中心で割って得られる Lie 群を $PSp(n)$ とかく. $PSp(n)$ は対称 R 空間でない.

$H^*(PSp(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[v]/(v^4) \otimes \wedge(b_7, \cdots, \cdots, b_{4n-1})(v \in H^1, b_i \in H^i)$ である [5]. よって普遍係数定理より $\dim(H_*(PSp(n); \mathbb{Z}_2)) = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$ となる

また $\pi : Sp(n) \to PSp(n) = Sp(n)/\{\pm I_n\}$ を自然な射影であるとすれば, $PSp(n)$ の大対蹠部分群として,

$$\pi(Q[8] \cdot \Delta_n)$$

が得られている. ただし,

$$Q[8] = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}, \Delta_n = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{pmatrix} ; \epsilon = \pm 1 \right\}$$

である. よって, $\#_2 PSp(n) = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$ となる.

例 1.6. n を奇数とする.

$SU(n)$ をその中心で割って得られる Lie 群を $PU(n)$ とかく. やはり $PU(n)$ は対称 R 空間でない.

このとき, $H^*(PU(n); \mathbb{Z}_2) \cong \wedge(x_2, \cdots .x_n)(x_i \in H^{2i-1})$ である. よって普遍係数定理から $\dim H_*(PU(n); \mathbb{Z}_2) = 2^{n-1}$ となる.

また, $\pi : SU(n) \to PU(n)$ を中心で割る射影とすれば, $PU(n)$ の大対蹠部分群として

$$\pi(\Delta_n^+)$$

が得られている. ただし, $\Delta_n^+ := \{A \in \Delta_n; \det A = 1\}$ である. したがって, $\#_2 PU(n) = 2^{n-1}$ となる.

例 1.7. 例外型コンパクト Lie 群 G_2 に関して, $H^*(G_2; \mathbb{Z}_2) \cong \wedge(e_5) \otimes \mathbb{Z}_2[x_3]/(x_3^4)(e_5 \in H^5, x_3 \in H^3)$ である. したがって, $\dim H_*(G_2; \mathbb{Z}_2) = 2 \cdot 4 = 2^3$. また, $\#_2 G_2 = 2^3$ である.

これらの例はすべて, 極大対蹠集合がすべて大対蹠集合になっていることに注意しておく.

そこで対称 R 空間でない最も簡単なコンパクト対称空間である $SU(n)$ に関して, 大対蹠集合とホモロジーの関係を調べるためにその Morse 関数を調べる. 方針としては, $SU(n)$ はすでにベクトル空間 $M(n; \mathbb{C})$ に行列として埋め込まれているので, その中での高さ関数から Morse 関数を調べていく.

2　主結果

$M(n;\mathbb{C})$ 上の内積を任意の $X, Y \in M(n;\mathbb{C})$ に関して $\langle X, Y\rangle = \mathrm{ReTr}(X^*Y)$ と定める．各 $X \in M(n;\mathbb{C})$ に関して高さ関数 h_X を $h_X(Y) = \langle X^*, Y\rangle = \mathrm{ReTr}(XY)$ と定める．

以下の記号を用意しておく．

$$SU_{e^{ic}}(n) := \{A \in U(n); \det A = e^{ic}\}$$

各高さ関数 h_X の $SU_{e^{ic}}(n)$ における臨界点集合を $C_{e^{ic}}(h_X)$ とする．

行列のいくつかの標準形を用いることで考えるべき高さ関数は

$$X \in \left\{ e^{it} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}; 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n, t \in \mathbb{R} \right\}$$

で与えられる高さ関数でよいことがわかる．

命題 2.1. 行列 X を $X = e^{it}\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$（$0 \leq x_1 \leq x_n$，$c \in \mathbb{R}$）であるとする．

このとき，$SU_{e^{ic}}(n)$ 上の高さ関数 h_X の臨界点集合が離散集合になるのは，以下の 2 種類．

1. $X = e^{ic}\mathrm{diag}(0, x_2, \cdots, x_n)$，（$x_i \in \mathbb{R}, 0 < x_2 < \cdots < x_n$）
2. $Y = e^{ic}\mathrm{diag}(y_1, \cdots, y_n)$，（$y_i \in \mathbb{R}, y_1 < \cdots < y_n$）

とくに，任意の c について X の臨界点集合 $C_{e^{ic}}(h_X)$ は $SU_{e^{ic}}(n)$ の大対蹠集合になり，Y について $SU_{e^{int}}(n), SU_{e^{-int}}(n)$ の臨界点集合 $C_{e^{int}}(h_Y), C_{e^{-int}}(h_Y)$ は大対蹠集合を含む．

したがって，この 2 パターンが $SU_{e^{ic}}(n)$ における Morse 関数の候補になる．

定理 2.2. 命題 2.1 における X のタイプの高さ関数はどの $SU_{e^{ic}}(n)$ においても Morse 関数になる．

定理 2.3. 命題 2.1 における Y のタイプの高さ関数について以下は同値．

1. $\sum_{i=2}^{n} \frac{y_1}{y_i} < 1$
2. h_Y が各 $SU_{e^{ic}}(n)$ の Morse 関数になり $C_{e^{ic}}(h_Y)$ の元の個数が 2^{n-1} になる．
3. h_Y が $SU_{-e^{-int}}(n)$ で Morse 関数になり，その臨界点集合が大対蹠集合になる．

とくに次の定理が神谷により与えられている [8].

定理 2.4. $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ は $0 < c_i, 2c_i < c_{i+1}$ を満たし

$$\begin{cases} c_1 \sin\theta_1 = c_2 \sin\theta_2 = \cdots = c_n \sin\theta_n \\ \theta_1 \pm \theta_2 \pm \cdots \pm \theta_n = 0 \pmod{\pi} \end{cases} \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = 0 \pmod{\pi}$$

をみたすような正数であるとする．このような $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ は存在する．

これらの $c_1, c_2, \cdots, c_n$ を用いて $SU(n)$ 上の関数 f を以下で定める．

$$f(\begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & \cdots & a_{1n}+ib_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+ib_{n1} & & a_{in}+ib_{nn} \end{pmatrix}) = c_1a_{11}+c_2a_{22}+\cdots+c_na_{nn}$$

このとき，f は $SU(n)$ の Morse 関数になり，

$$\{\begin{pmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{pmatrix}; \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n = 1\}$$

がその臨界点集合になる．

この定理における $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ は定理 2.3 の 1 を満たしていることがわかる．このことから，定理 2.3 は定理 2.4 の拡張になっている．

参考文献

[1] B.-Y.Chen and T.Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans.Amer.Math.Soc, 308(1988), 273-297.

[2] M.Takeuchi, Two-number of symmetric R-space, Nagoya.Math.J, 115(1989), 43-46.

[3] M.Takeuchi and S.Kobayashi, Minimal imbeddings of R-spaces, J.Diff.Geo, 2(1968), 203-215

[4] 戸田宏, 三村護, Lie 群の位相 上・下, 紀伊國屋書店 (1978).

[5] P.F.Baum and W.Browder, The cohomology of quotients of classical groups, Topology, 3(1965), 305-336.

[6] M.S.Tanaka and H.Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, Journal of Lie Theory, 27 (2017), No. 3, 801-829.

[7] M.S.Tanaka and H.Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J.Math, 50(2013), 161-169

[8] 横田一郎, 多様体と Morse 理論, 現代数学社（2016）.

[9] A.Gómez-Tato, E.Macías-Virgós and M.J.Pereria-Sáez, Trace map, Cayley transform and LS category of Lie groups, Ann.Glob.Anal.Geom,39(2011),325-35.

[10] E.Macías-Virgós and M.J.Pereria-Sáez, Height functions on compact symmetic spaces, Monatsh.Math,177(2015),119-140.

[11] J.M.Burns and M.J.Clancy, Polar sets as nondegenerate critical submanifolds in symmetric spaces, Osaka.J.Math., 31(1994), 533-559.

[12] 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店 (2005)