閉曲面上におけるラプラシアンの第一固有値の上限について

庄田　敏宏 *
佐賀大学 教育学部

概 要

本講演では，向き付けられた閉曲面上におけるラプラシアンの第一固有値の上限に関する最近の結果を紹介する．Jakobson, Levitin, Nadirashvili, Nigam, Polterovich によって提唱された種数 2 の場合の予想に関する研究である．

1　問題設定

M を向き付けられた種数 γ の閉曲面とし，$g = g_{ij}dx^i dx^j$ を M 上の Riemann 計量とする．このとき，M 上のラプラシアンが

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \qquad ((g^{ij}) = (g_{kl})^{-1},\ |g| = \det(g_{ij}))$$

によって定義される．定数 λ が M 上のラプラシアンの**固有値**であるとは，M 上の恒等的に 0 でない関数 u で $\Delta_g u + \lambda u = 0$ を満たすものが存在するときをいう．この u のことを固有値 λ に対する**固有関数**という．ラプラシアンの固有値を降べきの順で $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ と番号付けをすると，$\lambda_0 = 0$ であり，さらに，

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$$

というように，離散的に増加していずれは ∞ に発散することが知られている．本講演では，最小の正の固有値 λ_1 のことをラプラシアンの**第一固有値**という．

第一固有値に関しては λ_1 はどこまで大きくなるか？という問題がある．ただし，計量 g を定数倍すれば λ_1 はいくらでも大きくできるし，いくらでも小さくできる．したがって，計量の定数倍に依存しない $\Lambda(g) = \lambda_1(g)\cdot \mathrm{Area}(g)$ の最大値を問う問題が Berger によって提唱された問題である．ここで，$\lambda_1(g)$

*本内容は，科学研究費 (基盤研究 (C) 一般,「周期的極小曲面の安定性およびその極限の研究」課題番号 16K05134) の援助を受けており，また，名古屋大学の納谷信氏との共同研究に基づくものである [NS].

と Area(g) はそれぞれ計量 g による第一固有値と面積である．これに関しては以下の先行研究が知られている．

定理 1.
(1) (Hersch [Her]) $\gamma = 0$ のとき，$\Lambda(g) \leq 8\pi$ が成り立つ．なお，等号成立は球面上の標準計量のとき，かつ，そのときに限る．
(2) (Yang-Yau [YY]) 種数 γ のとき，$\Lambda(g) \leq 8\pi \cdot \left[\frac{\gamma+3}{2}\right]$ が成り立つ．ここで，$[\,\cdot\,]$ は整数部分を表す．
(3) (Nadirashvili [N]) $\gamma = 1$ のとき，$\Lambda(g) \leq 8\pi^2/\sqrt{3}$ が成り立つ．なお，等号成立は一つの内角が $\pi/3$ であるひし形による平坦計量のとき，かつ，そのときに限る．

いずれの結果も，Λ が計量に依存しない定数で上から抑えられている．しかし，こうした現象は 3 次元以上では成立しない場合が知られている ([U, T])．

定理 1 の (2) は $\gamma = 0$ のときは最良の評価であるが，$\gamma = 1$ のときは最良の評価ではない．このことから，(2) の不等式が最良か？最良でなければ最良の最大値ないし上限は何か？という問題が考えられる．単純な問題であるが，種数が高い場合は未解決問題である．

$\gamma = 2$ のとき，定理 1 の (2) から $\Lambda \leq 16\pi$ が成り立つ．この評価に対しては，Jakobson，Levitin，Nadirashvili，Nigam，Polterovich による以下の示唆 [JLNNP] がある．

予想.
Bolza 曲面上には $\Lambda(g) = 16\pi$ を満たす分岐計量 g が存在する．

この予想は極小曲面の Morse 指数の理論と深く関連しており，Nayatani [Nay] の技法を用いて解決される．

なお，上の予想における分岐計量は通常の計量で近似ができることから，通常の計量に対しても $\Lambda \leq 16\pi$ が成り立つ．ただし，等号を成立させる通常の計量の構成は未だ解決されていない．

2 極小曲面の Morse 指数との関連

Bolza 曲面とは，

$$B = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z^4+1)\} \cup \{(\infty,\infty)\}$$

で定義される種数 2 の超楕円型 Riemann 面のことである．$g_B \colon B \ni (z,w) \mapsto z \in \overline{\mathbb{C}}$ により分岐二重被覆が得られ，球面上の標準計量 $ds^2_{S^2}$ を引き戻して得られる分岐計量 $ds^2_B = {g_B}^* ds^2_{S^2}$ が予想で扱われているものである．g_B は球面の分岐二重被覆であることから Area$(ds^2_B) = 8\pi$ となり，これにより $\Lambda(g) = 16\pi$ なる予想の主張は $\lambda_1(ds^2_B) = 2$ を意味することが導かれる．

これを示すために [JLNNP] で考察されている以下の B の変形を扱う．$0 < \theta < \pi/2$ なる θ に対して

$$B_\theta = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z^4 + 2\cos 2\theta \cdot z^2 + 1)\} \cup \{(\infty, \infty)\}$$

で定義される種数 2 の超楕円型 Riemann 面を B_θ とする．なお，$B_{\pi/4} = B$ である．B と同様に $g_\theta \colon B_\theta \ni (z, w) \mapsto z \in \overline{\mathbb{C}}$ なる分岐二重被覆を考え，球面の標準計量をこれにより引き戻したものを ds^2_θ とする．

主結果.

$\theta_1 \approx 0.65$ なる θ_1 が存在して，$\theta_1 \leq \theta \leq \pi/2 - \theta_1$ なる θ に対して $\lambda_1(ds^2_{B_\theta}) = 2$，即ち，$\Lambda(ds^2_\theta) = 16\pi$ が成り立つ．

以下では，この問題と極小曲面の Morse 指数の関連を述べる．

$M \to \mathbb{R}^3$ を向き付けられた完備な極小曲面とする．$\Omega \subset M$ を相対コンパクトな領域とし，$\mathrm{ind}(\Omega)$ を

$$\int_\Omega (|du|^2 + 2Ku^2)\, da < 0, \quad \forall u \in V \setminus \{0\}$$

なる線形空間 $V \subset C^\infty_0(\Omega)$ の最大次元とする．ここで，K と da は M の Gauss 曲率と面積要素である．さらに，

$$\mathrm{ind}(M) = \sup_\Omega \mathrm{ind}(\Omega)$$

と定義する．ここで，上限は相対コンパクトな領域 $\Omega \subset M$ 全体でとるものとする．$\mathrm{ind}(M)$ は有限とは限らないが，以下の Fischer-Colbrie [F] による結果が知られている．

$$\mathrm{ind}(M) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_M (-K)\, da < \infty$$

Osserman [O] の結果から，全曲率有限で完備な極小曲面 M は，コンパクト Riemann 面 $\overline{M}$ から有限個の点を除いたものに共形同値であり，その Gauss 写像 $g \colon M \to \overline{\mathbb{C}}$ は有理型関数 $\overline{g} \colon \overline{M} \to \overline{\mathbb{C}}$ に拡張される．

一般に，コンパクト Riemann 面 $\overline{M}$ 上の有理型関数 $g \colon \overline{M} \to \overline{\mathbb{C}}$ による球面上の標準計量の引き戻しを ds^2_g とする．Δ_g を ds^2_g によるラプラシアンとすると，$\mathrm{ind}(g)$ は重複度も込めた 2 未満の Δ_g の固有値の個数に一致する．Fischer-Colbrie の結果により，極小曲面の Morse 指数は拡張された Gauss 写像 $\overline{g}$ に関する $\mathrm{ind}(\overline{g})$ に一致する．Δ_g には 0 固有値 (2 未満の固有値) があることから，$\mathrm{ind}(g) \geq 1$ が成り立つ．したがって，Δ_{g_B} の第一固有値が 2 であるという主張は，$\mathrm{ind}(g_B) = 1$ であることを意味する．

主結果は B_θ において $\mathrm{ind}(g_\theta)$ を計算することにより示される．本講演ではその詳細を紹介する．

参考文献

[F] D. Fischer-Colbrie, On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds, Invent. Math. **82** (1985), no. 1, 121–132.

[NS] S. Nayatani and T. Shoda, *Metrics on a closed surface of genus two which maximize the first eigenvalue of the Laplacian*, arXiv:1704.06384.

[Her] J. Hersch, Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogénes, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. A-B **270** (1970), A1645–A1648.

[JLNNP] D. Jakobson, M. Levitin, N. Nadirashvili, N. Nigam, I. Polterovich, How large can the first eigenvalue be on a surface of genus two?, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 63, 3967–3985.

[N] N. Nadirashvili, Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 5, 877–897.

[Nay] S. Nayatani, Morse index and Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space, Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 4, 511–537.

[O] R. Osserman, A survey of minimal surfaces. Second edition, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[T] S. Tanno, The first eigenvalue of the Laplacian on spheres, Tôhoku. Math. Journ. **31** (1979), 179–185.

[U] H. Urakawa, On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), no. 1, 209–226.

[YY] P. C. Yang and S. T. Yau, Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **7** (1980), no. 1, 55–63.