Tzitzéica 方程式の有限間隙解に付随した極小曲面の構成

宇田川 誠一（日本大学)

(∗) この原稿は井ノ口 順一 氏（筑波大学)、谷口 哲也 氏（日本大学）との共同研究に基づく。

1 Tzitzéica 方程式の小史

リーマン面 M から 5 次元単位球面 S^5 への極小はめ込みを考える。リーマン面には共形構造に付随した共形座標系を入れておく。さらに、Hopf ファイブレーション に関して水平的 (horizontal) な極小曲面を考える。このようなはめ込みのクラスを HMS (horizontal minimal surface) という記号で表すことにしよう。このようなはめ込みが存在するための可積分条件は

$$(1.1)\qquad (\mathrm{T}E)\quad \partial_{\bar z}\partial_z \mathfrak{u} = e^{-2\mathfrak{u}} - e^{\mathfrak{u}} \qquad \left((\mathrm{OT}E)\quad \partial_x\partial_t \mathfrak{u} = e^{\mathfrak{u}} - e^{-2\mathfrak{u}}\right)$$

で与えられる。これを **Tzitzéica 方程式**という。この方程式を最初に研究したのは、G.Tzitzeica(1907) であり、彼はアファイン微分幾何の研究で (OTE) を調べた。その後, Cherdantsev-Sharipov(1990) が (OTE) に対して”有限隙間解”を与えた。つぎに、R.A.Sharipov(1991) が S^5 の水平的極小曲面 (=“HMS”) を Baker-Akhiezer 関数で記述した。($\mathbf{C}P^2$ 内の全実極小曲面（totally real minimal surface）も得られる。) さらに、Castro-Urbano(1994) が (TE) の Jacobi 楕円関数解を与えて, $\mathbf{C}P^2$ 内の平坦でない 2 次元全実極小トーラスの例を初めて構成した。F. Burstall(1995) は S^n または $\mathbf{C}P^n$ への非等方的共形 2 次元調和トーラス φ は, ある旗多様体への有限型 Primitive 写像の自然な射影として得られることを証明した。大仁田-宇田川 (2002) が φ 自体，有限型であることを示した, i.e., φ は Lax 型の方程式の解から得られる：

$$(1.2)\qquad \begin{cases} d\xi &= [\xi, F^{-1}dF], \quad \xi : T^2 \longrightarrow \Lambda_d \subset \Lambda\mathfrak{g}_\sigma \\ \xi &= \mathrm{A}dF^{-1}\cdot\xi(0). \end{cases}$$

H. Ma-Y. Ma(2005) は $\mathbf{C}P^2$ における Castor-Urbano の 2 次元全実極小トーラスの構成を BA-関数を用いて一般化した。

【まとめ】

「Tzitzeica 方程式」“Jacobi 楕円関数解 [2]”⊂ “有限隙間解 [7]”

「有限型２次元極小トーラス」

“Jacobi 楕円関数を用いた表現式 [3] for S^5, [2] for $\mathbf{C}P^2$”

⊂ “Baker-Akhiezer 関数を用いた表現式 [7] for S^5, [5] for $\mathbf{C}P^2$”

【問　題】上記の２つの包含関係を explicit に記述せよ！

2 S^5 内の HMS の楕円関数解

$s_0 : M \longrightarrow S^5 \subset \mathbf{C}^3$ を水平的極小曲面で誘導計量を $ds^2 = 2e^{\mathfrak{u}}dzd\bar z$ とする。$<,>$ を $M\times\mathbf{C}^3$ のエルミート・ファイバー計量とする。このとき, つぎを得る：

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &< s_0, s_0 >= 1,\ < \partial_z s_0, s_0 >=< \partial_{\bar z} s_0, s_0 >= 0,\\ &< \partial_z s_0, \partial_{\bar z} s_0 >=< \partial_{\bar z} s_0, \partial_z s_0 >= 0,\ \partial_{\bar z}\partial_z s_0 = -e^{\mathfrak{u}} s_0. \end{aligned}$$

これらの式を用いて unitary frame F をつぎのように作る：

$$s_1 = e^{-\frac{\mathfrak{u}}{2}}\partial_z s_0, \quad s_2 = e^{-\frac{\mathfrak{u}}{2}}\partial_{\bar z} s_0, \quad \phi = e^{-\frac{\mathfrak{u}}{2}} < \partial_z\partial_z s_0, s_2 > \tag{2.2}$$

とおけば $F = (s_0\ s_1\ s_2)$ は unitary frame になる。$s_0 : M \longrightarrow S^5 \subset \mathbf{C}^3$ が "極小" であるための必要十分条件は Laplacian

$$\Delta s_0 = -(2e^{\mathfrak{u}})^{-1}(\partial_x\partial_x + \partial_y\partial_y)\, s_0 = -2e^{-\mathfrak{u}}\partial_{\bar z}\partial_z s_0$$

がつぎを満たすことである：

$$\Delta s_0 = 2s_0 \Longleftrightarrow \partial_{\bar z}\partial_z s_0 = -e^{\mathfrak{u}} s_0 \tag{2.3}$$

S^5 の誘導リーマン計量 h は $h(X,Y) = \mathrm{R}e\,(< X, Y >)$ で与えられる。(2.1)〜(2.3) を用いて計算すると

$$F^{-1}\partial_z F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{\frac{\mathfrak{u}}{2}} \\ e^{\frac{\mathfrak{u}}{2}} & \frac{\mathfrak{u}_z}{2} & 0 \\ 0 & \phi e^{-\mathfrak{u}} & -\frac{\mathfrak{u}_z}{2} \end{pmatrix} =: U, \quad F^{-1}\partial_{\bar z} F = \begin{pmatrix} 0 & -e^{\frac{\mathfrak{u}}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{\mathfrak{u}_{\bar z}}{2} & -\bar\phi e^{-\mathfrak{u}} \\ e^{\frac{\mathfrak{u}}{2}} & 0 & \frac{\mathfrak{u}_{\bar z}}{2} \end{pmatrix} =: V, \tag{2.4}$$

が得られる。

【Compatibility condition】

$$\partial_{\bar z} U - \partial_z V = [U, V] \Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_{\bar z}\partial_z \mathfrak{u} & = |\phi|^2 e^{-2\mathfrak{u}} - e^{\mathfrak{u}}, \\ \partial_{\bar z}\phi & = 0. \end{cases}$$

必要なら局所複素座標系を取りなおして $\phi = -1$ としてよい。以上より, Tzitzéica 方程式 (TE) を得る。

【Tzitzeica 方程式の楕円関数解】

(TE) の $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(x)$ という形の解を初期条件 $e^{\mathfrak{u}(0)} = \dfrac{\alpha}{2}, \mathfrak{u}_x(0) = 0$ のもとで解く。

$$e^{\mathfrak{u}(x)} = \zeta_3 - (\zeta_3 - \zeta_2)\mathrm{sn}^2(\sqrt{2}\sqrt{\zeta_3 - \zeta_1}x, p) \tag{2.5}$$

は (TE) の解である。ここで,

$$\zeta_1 = \frac{1 - \sqrt{\alpha^3 + 1}}{\alpha^2}, \quad \zeta_2 = \frac{1 + \sqrt{\alpha^3 + 1}}{\alpha^2}, \quad \zeta_3 = \frac{\alpha}{2}, \quad p^2 = \frac{\zeta_3 - \zeta_2}{\zeta_3 - \zeta_1}$$

であり, sn は modulus p の Jacobi sn-関数である。つぎにパラメーター x を複素変数に拡張すれば $e^{\mathfrak{u}(x)}$ は周期 $2\omega_0, 2\omega_0'$ をもつ 2 重周期関数である。ここに

$$\omega_0 = \frac{K(p)}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta_3 - \zeta_1}}, \quad \omega_0' = \frac{\sqrt{-1}K(p')}{\sqrt{2}\sqrt{\zeta_3 - \zeta_1}}, \quad p' = \sqrt{1 - p^2}. \tag{2.6}$$

【Weierstrass $\wp$-関数との関係】

$\eta_j = \zeta_j - \frac{a}{3}, (j = 1, 2, 3)$ とおく。ここで $a = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{2}{\alpha^2}$ である。このとき $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$ であるから, Weierstrass $\wp$-関数はつぎで与えられる：

$$\wp(z) = \eta_1 + \frac{\eta_3 - \eta_1}{\mathrm{sn}^2(\sqrt{\eta_3 - \eta_1}z, k)}, \quad k^2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_1} = 1 - p^2 = (p')^2.$$

よって, $k=p', k'=p$ としてよい。$\wp(z)$ は 2 つの周期 $2\omega(k), 2\omega'(k)$ をもつ 2 重周期関数（楕円関数）であり, (2.6) より

(2.7)

$$\omega(k)=\frac{K(k)}{\sqrt{\eta_3-\eta_1}}=\frac{K(p')}{\sqrt{\zeta_3-\zeta_1}}=-\sqrt{2}\sqrt{-1}\omega_0',\quad \omega'(k)=\frac{\sqrt{-1}K(k')}{\sqrt{\eta_3-\eta_1}}=\frac{\sqrt{-1}K(p)}{\sqrt{\zeta_3-\zeta_1}}=\sqrt{2}\sqrt{-1}\omega_0$$

が成りたつ。

【楕円関数を用いた極小曲面の表現式】

s_0 を変数 y だけで微分することにより $\partial_y^3 s_0+2a\partial_y s_0+2\sqrt{-1}s_0=0$ を得る。特性方程式 $\mu^3+2a\mu+2\sqrt{-1}=0$ の解を $\mu=\mu_1,\mu_2,\mu_3$ とする。ただし, $\mu_j\zeta_j=-\sqrt{-1}, (j=1,2,3)$ が成りたつように番号 j を選ぶ。$r_j=-\sqrt{-1}\mu_j=-\zeta_j^{-1}$ とおけば

$$s_0(x,y)=\left(\sqrt{\frac{r_2}{r_2-r_1}}e^{\mu_1 y}\mathrm{dn}(v),\sqrt{\frac{r_1}{r_1-r_2}}e^{\mu_2 y}\mathrm{cn}(v),\sqrt{\frac{r_1}{r_1-r_3}}e^{\mu_3 y}\mathrm{sn}(v)\right) \tag{2.8}$$

が得られる。ここに, $v=\sqrt{2}\sqrt{\zeta_3-\zeta_1}x$ である。

【注意】これは Castro-Urbano 解 ([2]) の $\psi_{a,\pi/2}$ に一致する。

【楕円曲線】つぎの楕円曲線から出発する: $\mathcal{C}: B^2=4(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)(\eta-\eta_3)$. この曲線には $(B,\eta)=(\wp'(z),\wp(z))$ というパラメータを入れることができる。また $\mathcal{C}$ のサイクル $\{a_1,b_1\}$ をつぎが成りたつように選ぶ：

$$\int_{a_1}\frac{d\eta}{B}=2\omega(k),\quad \int_{b_1}\frac{d\eta}{B}=2\omega'(k). \tag{2.9}$$

一方, $Y(x)=e^{\mathrm{u}(x)}$ とおけば (TE) はつぎと同値である：$\left(\dfrac{dY}{dx}\right)^2=-8(Y-\zeta_1)(Y-\zeta_2)(Y-\zeta_3)$. 従って, もう 1 つの楕円曲線を考える: $\mathcal{C}^0: \widetilde{B}^2=-8(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta_3)$.

【$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^0$ の間の変換】

$\widetilde{B}=\sqrt{2}\sqrt{-1}B, \zeta=\eta+\dfrac{a}{3}$ ととればよい。$\mathcal{C}^0$ のサイクル $\{a_1^0,b_1^0\}$ を $a_1^0=b_1, b_1^0=-a_1$ を満たすように選べばつぎを得る：

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{a_1^0}\frac{d\zeta}{\widetilde{B}}=\int_{b_1}\frac{d\eta}{\sqrt{2}\sqrt{-1}B}=\frac{2\omega'(k)}{\sqrt{2}\sqrt{-1}}=2\omega_0\\[2ex] \displaystyle\int_{b_1^0}\frac{d\zeta}{\widetilde{B}}=-\int_{a_1}\frac{d\eta}{\sqrt{2}\sqrt{-1}B}=-\frac{2\omega(k)}{\sqrt{2}\sqrt{-1}}=2\omega_0'.\end{cases} \tag{2.10}$$

また, $H^1(\mathcal{C}^0,\mathbf{C})$ の基底をつぎで与える：$w_1^0=\dfrac{\pi\sqrt{-1}}{\omega_0}\dfrac{d\zeta}{\widetilde{B}}$. このとき, つぎを得る：

$$\int_{a_1^0}w_1^0=2\pi\sqrt{-1},\quad \int_{b_1^0}w_1^0=2\pi\sqrt{-1}\frac{\omega_0'}{\omega_0}=-2\pi\frac{K(p')}{K(p)}=:\Pi(p).$$

以上で, $\mathcal{C}^0$ は周期行列 $\left(2\pi\sqrt{-1}\ \Pi(p)\right)$ をもつことがわかった。

【正規化された第2種のアーベル微分】

$$\Omega_0^0 = -\left(\wp(z) + \frac{\zeta_w(\omega')}{\omega'}\right)\frac{d\zeta}{\widetilde{B}}$$

とおく。ここで, ζ_w は Weierstrass ζ-関数である。$\int_{a_1^0}\Omega_0^0 = 0$ がわかる。また, $\mathbf{U}^0 = \int_{b_1^0}\Omega_0^0$ とおけば

$$\mathbf{U}^0 = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2\omega_0} \tag{2.11}$$

を得る。

3 リーマン θ 関数と Jacobi θ 関数

$\Pi = \Pi(p), z \in \mathbf{C}$ に対して $\tau = \dfrac{\Pi}{2\pi\sqrt{-1}}, v = \dfrac{z}{2\pi\sqrt{-1}}$ とおく。$\mathcal{C}^0$ に対するリーマン θ 関数は

$$\theta(z;\Pi) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \exp(\frac{1}{2}\Pi m^2 + mz)$$

である。$\theta_0(v) = \theta(z + \pi\sqrt{-1})$ は Jacobi の θ 関数の1つとする。

【微分方程式 (TE) の有限間隙解】

つぎの有名な公式

$$\frac{d^2}{du^2}\log\theta_0\left(\frac{u}{2K(p)}\right) = \mathrm{dn}^2(u,p) - \frac{E(p)}{K(p)} \tag{3.1}$$

が成りたつ。ここで, $E(p) = \int_0^{K(p)} \mathrm{dn}^2(u,p)du$ は**第2種完全楕円積分**である。これを書き換えると,

$$2\partial_{\bar{z}}\partial_z \log\theta_0\left(\frac{x}{2\omega_0}\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log\theta_0\left(\frac{x}{2\omega_0}\right)$$
$$= (\zeta_3 - \zeta_1)\left(1 - \frac{E(p)}{K(p)}\right) - (\zeta_3 - \zeta_2)\mathrm{sn}^2(\sqrt{2}\sqrt{\zeta_3 - \zeta_1}x, p)$$

これと (2.5) からつぎが得られる：

$$\begin{cases} e^{u(x)} & = C + 2\partial_{\bar{z}}\partial_z \log\theta(\mathbf{U}^0(z+\bar{z}) + \pi\sqrt{-1}) \\ C & = \zeta_1 + \dfrac{E(p)}{K(p)}(\zeta_3 - \zeta_1). \end{cases} \tag{3.2}$$

ここで, 定数 C はつぎのように書き換えることができる。

Lemma 3.3.

$$C = \frac{a}{3} - \frac{\zeta_w(\omega')}{\omega'}$$

4 水平的極小曲面を Baker-Akhiezer 関数で表す

有限型の水平的極小曲面は, **1** で述べた ODE の解 $\xi = \mathrm{A}dF^{-1}\xi(0)$ を用いて記述される。ここで $\xi(0)$ は z に依存しない初期条件であり $\xi(0) = \lambda U|_{z=0} + \lambda^{-1}V|_{z=0}$ ととることにする。このとき, スペクトル曲線は

$$\det(\xi - \mu I) = \det(\xi(0) - \mu I) = 0$$

で与えられる。これより $\mu^3 + 2a\mu = \lambda^3 - \lambda^{-3}$ を得るが, $\nu = \lambda^3$ と変換して $\mu^3 + 2a\mu = \nu - \nu^{-1}$ を得る。このアフィン曲線に無限遠点 $\mu = \infty$ を付け加えて種数 2 のコンパクト・リーマン面 $\hat{\mathcal{C}}$ を得る。$\widetilde{\nu} = \nu + \nu^{-1}$ とおくことにより, $\hat{\mathcal{C}}$ は超楕円曲線

$$\hat{\mathcal{C}} : \widetilde{\nu}^2 = \left(\mu^3 + 2a\mu\right)^2 + 4$$

として表せる。変換 $P = \mu^{-1}, Q = \mu^{-3}\widetilde{\nu}$ を行うと $Q^2 = 4P^6 + 4a^2P^4 + 4aP^2 + 1$ を得るので, 無限遠点は 2 点あり, $\hat{P}_0 = (0,1), \hat{P}_\infty = (0,-1)$ と表す。2 重被覆写像 $\varphi : \hat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}^0$ は

$$\zeta = \frac{1}{2}(2a + \mu^2), \quad \widetilde{B} = -\sqrt{-1}\widetilde{\nu}$$

で与えられる。詳細は省略するが, $H^1(\hat{\mathcal{C}}, \mathbf{C})$ の基底 $\{\hat{w}_1 . \hat{w}_2\}$ を $\varphi^* w_1^0 = \hat{w}_1 + \hat{w}_2$ が成りたつように構成することができる。このとき, Prym-Abel 写像が

$$\mathcal{B} : \hat{\mathcal{C}} \ni \hat{P} \longrightarrow \mathcal{B}(\hat{P}) = \int_{\hat{P}_0}^{\hat{P}} (\hat{w}_1 + \hat{w}_2) \in \mathrm{P}rym(\hat{\mathcal{C}}) \cong \mathcal{C}^0$$

により定義できる。

【超楕円曲線 $\hat{\mathcal{C}}$ 上の正規化された第 2 種 Abel 微分】

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \hat{\Omega}_\infty = -\varphi^*\Omega_0^0 - \dfrac{\sqrt{-1}}{2}d\mu, \\[2ex] \hat{\Omega}_0 = \varphi^*\Omega_0^0 - \dfrac{\sqrt{-1}}{2}d\mu. \end{cases}$$

と定める。

【Baker-Akhiezer 関数】

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \hat{\Psi}(z, \overline{z}, \hat{P}) &= \dfrac{\theta(\mathcal{B}(\hat{P}) - (z + \overline{z})\mathbf{U}^0 - \mathbf{e})\theta(\mathbf{e})}{\theta(\mathcal{B}(\hat{P}) - \mathbf{e})\theta((z + \overline{z})\mathbf{U}^0 + \mathbf{e})}\Phi_e(z, \overline{z}, \hat{P}), \\[2ex] \Phi_e(z, \overline{z}, \hat{P}) &= \exp\left(z\left(\displaystyle\int_{\hat{P}_1}^{\hat{P}} \hat{\Omega}_\infty - \frac{\sqrt{-1}}{2}\mu_1\right) - \overline{z}\left(\int_{\hat{P}_1}^{\hat{P}} \hat{\Omega}_0 - \frac{\sqrt{-1}}{2}\mu_1\right)\right) \end{cases}$$

【Reality 条件】

$$(4.3)\qquad \hat{\Psi}(z, \overline{z}, \hat{P}, \mathbf{e}) = \overline{\hat{\Psi}(z, \overline{z}, \sigma\rho(\hat{P}), \mathbf{e})}.$$

が成りたつ。ここで, $\sigma(\mu, \widetilde{\nu}) = (-\mu, -\widetilde{\nu}), \rho(\mu, \widetilde{\nu}) = (-\overline{\mu}, \overline{\widetilde{\nu}})$ である。

【定理】
(1) $\hat{\Psi}$ は $\partial_{\overline{z}}\partial_z\hat{\Psi} = -e^{\mathrm{u}}\hat{\Psi}$ を満たす。
(2) フレーム $\left\{\psi_1 = \hat{\Psi}, \psi_2 = \partial_z\hat{\Psi}, \psi_3 = -\sqrt{-1}\nu e^{-u}\partial_{\overline{z}}\hat{\Psi}\right\}$ はつぎを満たす：

$$
\left\{\begin{array}{ll}\partial_z\psi_1 & = \psi_2 \\ \partial_z\psi_2 & = u_z\psi_2 + \psi_3 \\ \partial_z\psi_3 & = \sqrt{-1}\nu\psi_1 - u_z\psi_3\end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{ll}\partial_{\overline{z}}\psi_1 & = \sqrt{-1}\nu^{-1}e^u\psi_3 \\ \partial_{\overline{z}}\psi_2 & = -e^u\psi_1 \\ \partial_{\overline{z}}\psi_3 & = -e^{-2u}\psi_2\end{array}\right. \tag{4.4}
$$

(3) 反正則対合 $\rho(\mu, \widetilde{\nu}) = (-\overline{\mu}, \overline{\widetilde{\nu}})$ に対して

$$
\hat{W}(\hat{P}) = \psi_1(\hat{P})\overline{\psi_1(\rho(\hat{P}))} + e^{-\mathrm{u}}\psi_2(\hat{P})\overline{\psi_2(\rho(\hat{P}))} + e^{\mathrm{u}}\psi_3(\hat{P})\overline{\psi_3(\rho(\hat{P}))}
$$

は $z, \overline{z}$ に依存しない。
(4) $\hat{P}_j = (\mu_j, 0), (j = 1, 2, 3)$ とするとき, (2.8) の s_0 はつぎのように表現できる：

$$
s_0(x, y) \equiv \left(\frac{\hat{\Psi}(z, \overline{z}, \hat{P}_1, \mathbf{e})}{\sqrt{\hat{W}(\hat{P}_1)}}, \frac{\hat{\Psi}(z, \overline{z}, \hat{P}_2, \mathbf{e})}{\sqrt{\hat{W}(\hat{P}_2)}}, \frac{\hat{\Psi}(z, \overline{z}, \hat{P}_3, \mathbf{e})}{\sqrt{\hat{W}(\hat{P}_3)}}\right) \tag{4.5}
$$

(ただし, $SU(3)$ の作用を法とする。)

【結語】これは解説書 [8] の概要紹介である。詳しくは [8] を参照のこと。この内容は, スペクトル曲線の種数が一般の場合に拡張することができる ([4]) を参照。

引用文献

[1] F.E. Burstall, *Harmonic tori in spheres and complex projective spaces*, J. Reine Angew. Math. **469** (1995), 149–177.
[2] I. Castro and F. Urbano, *New examples of minimal Lagrangian tori in the complex projective plane*, Manuscripta Math. **85** (1994), 265–281.
[3] H. Hashimoto, T. Taniguchi and S. Udagawa, *Constructions of almost complex 2-tori of type (III) in the nearly Kähler 6-sphere*, Differential Geom. and its Appl. **21** (2004), 127-145.
[4] J. Inoguchi, T. Taniguchi and S. Udagawa, *Finite gap solutions for horizontal minimal surfaces of finite type in 5-sphere*, Journal of Integrable Systems 1(2016), 1-34.
[5] H. Ma and Y. Ma, *Totally real minimal tori in* $\mathbf{C}P^2$, Math. Z. **249** (2005), 241-267.
[6] Y. Ohnita and S. Udagawa, *Harmonic maps of finite type into generalized flag manifolds, and twistor fibrations*, Integrable Systems in Differential Geometry (Proceedings of the 9th MSJ-IRI, Tokyo, 2000), Contemporary Math. **308** (2002), 245–270, American Math. Soc. Providence.
[7] R.A. Sharipov, *Minimal tori in the five dimensional sphere in* $\mathbf{C}^3$, Theor. Math. Phys. **87** (1991), 363-369.
[8] Tzitzéica 方程式の有限間隙解に付随した極小曲面の構成理論－ Tzitzéica 方程式の楕円関数解を出発点としてー, Math-for-industry Lecture Note vol. 76, 80 ページ.

Nihon University, School of Medicine, Division of Mathematics, Itabashi, Tokyo, 173-0032, Japan
E-mail address: udagawa.seiichi@nihon-u.ac.jp