離散時間的極小曲面と離散波動方程式*

安本真士 (大阪市立大学数学研究所) †

概 要

本稿は，講演者によって新たに構築されはじめた3次元ミンコフスキー空間内の離散時間的極小曲面の理論 [6] の概説である．離散時間的極小曲面の理論は，一見すると従来の3次元ユークリッド空間内の離散極小曲面の理論と似ているが，異なる点が多数現れる．これらを対比しながら，講演者によって得られた結果の概要を説明する．

1 概要

可積分系理論のアプローチを用いた離散曲面の理論は，Bobenko-Pinkall [1] による先駆的な研究を契機として活発に研究がなされはじめた．特に，可積分系変換の可換律に着目し，3次元ユークリッド空間内の離散双等温曲面の理論が提唱され，その中に含まれる様々なクラスの離散曲面の研究がなされ始めている．近年，より一般の離散曲面に対する可積分系変換が確立され，さらに広いクラスの研究がなされ始めている．詳細は，講演者等による最近のプレプリント [2] を参照されたい．

3次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の時間的かつ平均曲率一定0となる曲面のことを時間的極小曲面という．時間的極小曲面は Weierstrass 型の表現公式 ([4], [3]) によって構成でき，さらに，3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面および $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の極大曲面の各座標関数が調和関数となることに対して，$\mathbb{R}^{2,1}$ 内の時間的極小曲面の各座標関数は，1次元波動方程式の解になることが知られている．この影響を受け，時間的極小曲面の研究では，従来の平均曲面零曲面の研究では現れない性質が現れる．実際，[4] で得られた表現公式と [3] で得られたものは，適切なパラメータ変換によって一方から他方へと書き換えることができることが [5] で示されている．

離散微分幾何学の研究においても近年，“パラメータ変換” の概念が新たに導入され，より広いクラスの離散曲面を取り扱えるようになった．これを踏まえ，申請者 [7] によって既に得られていた離散時間的双等温曲面に対する Weierstrass 型の表現公式にパラメータ変換を施し，[4] の表現公式の離散アナロジーを導出した．これにより，離散時間的双等温とは限らない，より一般の離散時間的極小曲面を考えることができるとともに,．応用として，離散時間的極小曲面の各座標関数は離散波動方程式の解となることを示した．

なお本研究は，講演者の離散波動方程式の研究と離散時間的曲面の研究とを結びつけるプロジェクトの第一段階である．

---

*本研究の一部は，日本学術振興会頭脳循環を加速する戦略的国際研究ネットワーク推進プログラム「対称性，トポロジーとモジュライの数理，〜数学研究所の国際研究ネットワーク展開〜」（PI: 大仁田義裕氏）の助成を受けたものである．

†e-mail: yasumoto@sci.osaka-cu.ac.jp

2　準備

$\mathbb{R}^{2,1} := (\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を 3 次元ミンコフスキー空間（ローレンツ空間とも呼ばれる）とする．ここで，$(x_1, x_2, x_0)^t, (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathbb{R}^{2,1}$ に対して，

$$\langle (x_1, x_2, x_0), (y_1, y_2, y_0) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_0 y_0$$

と定める．また，$\mathbb{C}' := \{a + j'b \mid a, b \in \mathbb{R}, (j')^2 = +1\}$ をパラ複素数全体の集合とする．このとき，次の関数を定義する．これは，複素関数論における，正則関数のパラ複素版である．

定義 2.1. $g : D(\subset \mathbb{C}') \to \mathbb{C}'$ が パラ正則関数 であるとは，$\partial_{\bar{z}} g = 0$ が成り立つことである．ここで，$\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - j' \frac{\partial}{\partial v}\right)$ $(z = u + j'v \in D)$ と定める．

つまり，パラ正則関数は，パラ正則版のコーシー・リーマンの方程式を満たすような関数のことを意味する．さらに，パラ正則関数は次の性質を満たすことが，簡単な計算から示すことができる．

命題 2.1. g をパラ正則関数とする．このとき，

$$\lim_{\epsilon \to 0} cr(g_p, g_q, g_r, g_s) = 1$$

が成り立つ．ここで，$\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$,

$$g_p = g(u + j'v) = g(u, v), g_q = g(u + \epsilon, v), g_r = g(u + \epsilon, v + \epsilon), g_s = g(u, v + \epsilon),$$
$$cr(g_p, g_q, g_r, g_s) := \frac{(g_p - g_q)(g_r - g_s)}{(g_r - g_q)(g_s - g_p)}$$

とする．このとき，cr を 4 点の 複比 という．

3　離散パラ正則関数

命題 2.1 から，離散パラ正則関数を次のように定義する．

定義 3.1. $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}'$ が 離散パラ正則関数 であるとは，$cr(g, g_1, g_{12}, g_2) \equiv 1$ が成り立つことをいう．ここで，任意の $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ に対し，

$$g = g(m, n) = g_{m,n},\ g_1 = g_{m+1,n},\ g_{12} = g_{m+1,n+1},\ g_2 = g_{m,n+1}$$

と略記する．

Remark. 2 点注意.

- g, g_1, g_{12}, g_2 が同一直線上にないと仮定する．このとき，$cr(g, g_1, g_{12}, g_2) \equiv 1$ であることの必要十分条件は，g, g_1, g_{12}, g_2 が，$\mathbb{C}'$ 内の 1 次元光錐上にあることである．
- 通常の離散複素正則関数の場合とは異なり ([1] 参照)，1 次元光錐にある 3 点を任意に選び，複比を 1 と与えたとしても，4 つ目の点は一意に定まらない．

先程の 2 つ目の注意から，離散パラ正則関数 g が与えられたとき，g, g_1, g_{12}, g_2 の位置は一意には定まらないが，g, g_1, g_{12}, g_2 を通る 1 次元光錐は一意に定まる．したがって，離散パラ正則関数を考える際は，g の像そのものに注目するより，むしろ，g, g_1, g_{12}, g_2 を頂点に持つ四角形 (g, g_1, g_{12}, g_2) を通る 1 次元光錐に着目するのが自然である．この点に着目することにより，次の性質が示される．

命題 3.1. g を離散パラ正則関数とする．このとき，g は次のように表される．

$$g_{m-n,m+n} = (1+j')p_m + (1-j')q_n + g_0 \quad \text{または} \tag{1}$$
$$g_{m-n,m+n} = (1+j')q_n + (1-j')p_m + g_0.$$

ここで，p_m, q_n はそれぞれ，m, n のみに依存するスカラー関数，$g_0 \in \mathbb{C}'$ は定数である．

この性質は，極めて自然である．実際，連続的な場合においても同様の事実が成り立つことが知られており，これをもとに，Konderak によって得られた Weierstrass 型の表現公式を，Magid によって得られた Weierstrass 型の表現公式に書き換えている ([5] 参照).

以後，離散パラ正則関数のうち，特に方程式 (1) をみたすものだけに注目する．すると，離散正則関数の場合には現れない，以下の性質が成り立つ．これは，従来の研究とは決定的に異なる点である．

定理 1. g_a, g_b を，方程式 (1) を満たす離散パラ正則関数とする．このとき，cg_a, $g_a + g_b$, $g_a \cdot g_b$ もまた方程式 (1) を満たす離散パラ正則関数となる．ここで，$c \in \mathbb{C}' \setminus \{z \in \mathbb{C}' |\, z\bar{z} = 0\}$ は定数とする．

4　主結果

[7] において既に，以下の結果を発表していた.

定理 2. 任意の時間的双等温極小曲面 $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^{2,1}$ は，離散パラ正則関数 $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}'$ を用いて表される差分方程式

$$f_* - f_{m,n} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2(g_* - g_{m,n})}\begin{pmatrix} g_{m,n} + g_* \\ 1 - g_{m,n}g_* \\ -j'(1 + g_{m,n}g_*) \end{pmatrix}\right) \quad ((m,n) \in \mathbb{Z}^2) \tag{2}$$

を解くことによって局所的に構成することができる．ここで，$* = (m+1, n), (m, n+1)$ である．

また図 1 のようにパラメータを取り替えることによって方程式 (2) を次のように書き換えることが出来る．

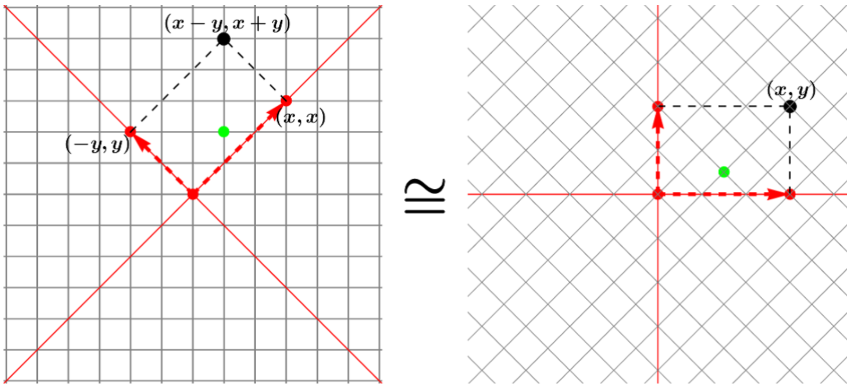

図 1: 離散曲面のパラメータ変換

定理 3. $x+y$ が偶数となる任意の $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ に対し,

$$f_{x+1,y}-f_{x,y}=\frac{p_{x+1,y}-p_{x,y}}{4(p_{x+\frac12,y+\frac12}-p_{x,y})(p_{x+\frac12,y+\frac12}-p_{x+1,y})}\begin{pmatrix}-2p_{x+\frac12,y+\frac12}\\(p_{x+\frac12,y+\frac12})^2-1\\(p_{x+\frac12,y+\frac12})^2+1\end{pmatrix}=:\mathfrak{p}(x),$$

$$f_{x,y+1}-f_{x,y}=\frac{q_{x,y+1}-q_{x,y}}{4(q_{x+\frac12,y+\frac12}-q_{x,y})(q_{x+\frac12,y+\frac12}-q_{x+1,y})}\begin{pmatrix}-2q_{x+\frac12,y+\frac12}\\(q_{x+\frac12,y+\frac12})^2-1\\-(q_{x+\frac12,y+\frac12})^2-1\end{pmatrix}=:\mathfrak{q}(y),$$

が成り立つ．ここで，$p_{x,y}:=\mathrm{Re}(g_{x-y,x+y})+\mathrm{Im}(g_{x-y,x+y})$，$q_{x,y}:=\mathrm{Re}(g_{x-y,x+y})-\mathrm{Im}(g_{x-y,x+y})$ とする．さらに，$\mathfrak{p}(x)$ (resp. $\mathfrak{q}(y)$) は x (resp. y) のみに依存する関数であり，y (resp. x) には依存しない．

この結果により，離散時間的双等温極小曲面 f は,

$$f_{x,y}=\sum_{X=x_0}^{x-1}\mathfrak{p}(X)+\sum_{Y=y_0}^{y-1}\mathfrak{q}(Y)$$

と表されることが分かる．さらに，その共役曲面および 1 パラメータ族

$$f^t_{x,y}=e^t\sum_{X=x_0}^{x-1}\mathfrak{p}(X)\pm e^{-t}\sum_{Y=y_0}^{y-1}\mathfrak{q}(Y)$$

もまた離散時間的極小曲面となり，さらに，離散時間的極小曲面の各座標成分が離散波動方程式の解となっていることが分かる．

謝辞

本研究遂行にあたり，神戸大学の Wayne Rossman 先生，Wellesley College の Martin Magid 氏から多くの貴重なご意見をいただきました．また，本研究は，日本学術振興会頭脳循環を加速する戦略的国際研究ネットワーク推進プログラム「対称性，トポロジーとモジュライの数理，～

数学研究所の国際研究ネットワーク展開〜」の援助を受けて，チュービンゲン大学 (ドイツ) に滞在中に本格的に始まりました．派遣研究者としてメンバーに加えていただいた，大仁田義裕先生に御礼申し上げます．また,「部分多様体論・湯沢 2017」にて講演の機会を与えてくださった，世話人の間下克哉先生，田崎博之先生，入江博先生，酒井高司先生にもこの場をお借りして御礼申し上げます.

参考文献

[1] A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, J. Reine Angew. Math., **475** (1996), 187-208.

[2] J. Cho, K. Naokawa, Y. Ogata, M. Pember, W. Rossman and Masashi Yasumoto, *Discretization of isothermic surfaces in Lie sphere geometry*, preprint.

[3] J.J. Konderak, *A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces*, Complex Var. Theory Appl. **50** (2005), no. 5, 319332.

[4] M.A. Magid, *Timelike surfaces in Lorentz 3-space with prescribed mean curvature and Gauss map*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), no. 3, 447-464.

[5] H. Takahashi, *Timelike minimal surfaces with singularities (in Japanese)*, master degree thesis, 2012.

[6] M. Yasumoto, *Discrete timelike minimal surfaces and discrete wave equations*, in preparation.

[7] M. Yasumoto, *Weierstrass-type representations for timelike surfaces*, to appear.