G_2 に関連した等質空間の幾何構造の関連 (Joint work with 大橋・中田・間下) in 湯沢,

橋本　英哉　名城大学理工学部数学科

2019 年 1 月 31 日

研究目的は例外型単純 Lie 群 G_2 の作用する種々の等質空間の幾何構造を微分形式 (De Rham コホモロジー群の元) として記述し、G_2 の持つ特殊な対称性を幾何学的に捉えることである。

1. 例外型単純 Lie 群 G_2 の作用する種々の等質空間を射影空間等に代数多様体として実現する。
2. G_2 の作用する種々の等質空間の間の fibre bundle 構造を記述する。
3. G_2 の作用する種々の等質空間の幾何構造を微分形式を用いて記述しその相互の関連を理解する。

例外型単純 Lie 群 G_2 の作用する種々の等質空間を理解するにはその Lie 部分群 を決定すればよいが、部分群の間に相互関連があるため同じ部分群、例えば $SU(2)$ (2 次特殊 uniary 群）でも G_2 への埋め込みは 4 種類存在する。対応する表現も込めて $SU(2)_{\mathrm{i}}$ ($i \in \{\mathrm{I}, \cdots, \mathrm{IV}\}$) と表示する。$G_2$ への群の最も複雑な埋め込みは (実 7 次元の) 既約表現から得られるがこの部分群による剰余空間 $G_2/SU(2)_{\mathrm{IV}}$ の実現方法は現在まで具体化されたものは存在していない。この実現は今後の課題である。

本研究では $G_2/SU(2)_{\mathrm{II}}$ の具体的な埋め込みを構成する。$G_2/SU(2)_{\mathrm{I}}$ は八元数内の純虚数部分 $\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ (7 次元ベクトル空間) 内の正規直交 2 枠の為す Steifel 多様体 $V_2(\mathrm{Im}\,\mathfrak{C})$ としての実現が

$$G_2/SU(2)_{\mathrm{I}} \simeq V_2(\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}) = SO(7)/SO(5)$$

としてすでに与えられている。一方 $SU(3)$ (3 次特殊 uniary 群） と $SO(4)$ (4 次特殊直

交群）は具体的な G_2 への埋め込みが記述され本質的に一つであることが示されている。

$$G_2/SU(3) \simeq S^6, \quad G_2/SO(4) = G_{ass}(\mathrm{Im}\,\mathfrak{C})$$

ここに S^6 は $\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ 内の単位球面、$G_{ass}(\mathrm{Im}\,\mathfrak{C})$ は $\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ 内の associative 3-plane 全体の為す Grassmann 多様体を表す。

特に、$SO(4)$ は

$$SO(4) \simeq SU(2)_{\mathrm{I}} \times SU(2)_{\mathrm{II}}/Z_2$$

なる同型が存在する。この様な同型から次の様な種々の等質空間の fibre bundle 構造が得られる。下記の図式では $Sp(1)_{\mathrm{i}} \simeq SU(2)_{\mathrm{i}}$ を用いている。

$$\begin{tikzcd}
 & & G_2 \arrow[dl, "Sp(1)_{\mathrm{I}}"'] \arrow[d, "T_2"] \arrow[dr, "Sp(1)_{\mathrm{II}}"] \arrow[dddll, bend right, "SU(3)"'] & \\
 & G_2/Sp(1)_{\mathrm{I}} \arrow[d, "S^1"'] \arrow[ddl, "S^5"'] \arrow[ddr, "SO(3)_{\mathrm{II}}"] & G_2/T_2 \arrow[dl, "S^2"'] \arrow[dr, "S^2"] & G_2/Sp(1)_{\mathrm{II}} \arrow[d, "S^1"] \arrow[ddl, "SO(3)_{\mathrm{I}}"'] \\
 & Gr_2^+(\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}) \cong G_2/U(2)_- \arrow[dl, "\mathbf{C}\mathbb{P}^2"] \arrow[dr, "\pi_-", "\mathbf{C}\mathbb{P}^1"'] & & G_2/U(2)_+ \arrow[dl, "\pi_+"', "\mathbf{C}\mathbb{P}^1"] \\
S^6 \cong G_2/SU(3) & & G_2/SO(4) \cong Gr_{\mathrm{ass}}^+(\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}) &
\end{tikzcd}$$

上記の fibre bundle 構造を実現する写像を具体的に記述し、かつ、それぞれの等質空間に付随する幾何構造を具体化した。

Calabi と Bryant により G_2 と $Spin(7)$ の Maurer-Cartan form が決定されている。この構造方程式は G_2 と $Spin(7)$ の Lie 部分群の構造が可視化できる点が重要である。この事実と Plüker embedding と Moving frame を用いることにより、上記の図式の全

ての写像を具体化できている。しかしながら、対応する誘導計量, 複素構造、Symplectic 構造、佐々木構造等々を具体化することは、未だ完全ではない。さらに、$G_2/SO(4)$ 上には四元数構造が存在する。対応する $SO(4)$-不変 4-form を具体化することもできているが、$G_2/SO(4)$ 上の Twistor 束 $G_2/U(2)_+$ に関連した Hyper Kähler 多様体 (実 12 次元の非 compact) の具体的記述は未だ解明されていない。我々の研究の中でその具体的構成はできているが対応する Hyper Kähler 構造がどの様なものであるかは未知である。$G_2/U(2)_+$ に関連した多様体 (実 12 次元の非 compact) 上の Hyper Kähler 構造を G_2 の表現を用いて具体的に記述することが目的だが未だできていない。

第三の目的は $G_2/U(2)_+$ と $G_2/U(2)_-$ の幾何構造の類似点と相違点を記述することである。$G_2/U(2)_+$ は $G_2/SO(4)$ 上の四元数構造に付随した Twitor 束であることから以下の様な性質を持つ。

(1) $G_2/SO(4)$ 上の S^2 束
(2) Einstein-Kähler 多様体
(3) Fano 多様体
(4) Complex contact 構造
(5) 複素 20 次元射影空間 $P(\Lambda^2(\mathbf{C}\otimes \mathrm{Im}\,\mathfrak{C}))$ 内の複素部分多様体
(6) G_2 の複素化 $G_2(\mathbf{C})$ の 非 compact な複素 5 次元 Lie 部分群 (Nilpotent) が存在し、この部分群が $G_2/U(2)_+$ に transitive に作用
(7) $G_2(\mathbf{C})$ のある parabolic subgroup による 等質空間

$G_2/U(2)_-$ は上記の条件の (1), (2), (3) の条件を満たすが、自然な Complex contact 構造は存在せず、$P(\mathbf{C}\otimes \mathrm{Im}\,\mathfrak{C}) \simeq P^6(\mathbf{C})$ 内の複素超曲面として実現でき、(5) と同様に (別の) 非 compact な複素 5 次元 Lie 部分群が推移的に作用する。

$G_2/U(2)_+$ と $G_2/U(2)_-$ の複素多様体 (実 10 次元) の幾何構造を記述することが第三の目的となる。さらに、$G_2/U(2)_+$ に作用する 非 compact な複素 5 次元 Lie 部分群を具体化ができている。

この二つの等質空間の差異と四元数 Kähler 多様体 $G_2/SO(4)$ の幾何構造との関連を記述し $G_2/SO(4)$ の 不変 4 次微分形式 (4 次の de-Rhem cohomology) による Calibration の Calibrated submanifolds の構成について考察し、Calibrated submanifolds の変形または moduli 空間の記述を行うことである。

実際次の式で与えれれることが示される。

$[\Omega] \in H^4_{DR}(G_2/SO(4))$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \Phi_i \wedge \Phi_i = \pi^*\Omega \\
&= \ 4\,\kappa_1^2 \wedge \kappa_2^1 \wedge \theta^2 \wedge \overline{\theta^2} \\
&\quad -2\,\kappa_1^2 \wedge \kappa_2^1 \wedge \theta^3 \wedge \overline{\theta^3} \\
&\quad -\kappa_1^2 \wedge \kappa_2^1 \wedge \kappa_3^1 \wedge \kappa_1^3 \\
&\quad -3\,\kappa_1^2 \wedge \kappa_3^1 \wedge \overline{\theta^2} \wedge \theta^3 \\
&\quad -3\,\kappa_1^2 \wedge \kappa_3^1 \wedge \theta^3 \wedge \overline{\theta^2} \\
&\quad +13\,\theta^2 \wedge \overline{\theta^2} \wedge \theta^3 \wedge \overline{\theta^3}.
\end{aligned}$$

参考文献

[Br1] R. L. Bryant. Submanifolds and special structures on the octonions. J. Diff. Geom., 17 (1982) 185–232.

[FS] T.Fukami and S.Ishihara. Almost Hermitian structure on S^6. Tohoku. Math. J., 7 (1955) 151-156.

[H-L] R.Harvey and H.B.Lawson. Calibrated geometries. Acta Math., 148 (1982) 47–157.

[H1] H.Hashimoto. Characteristic classes of oriented 6-dimensional submanifolds in the octonians. Kodai Math. J.,16 (1993) 65–73.

[H2] H.Hashimoto. Oriented 6-dimensional submanifolds in the octonions **III .** Internat. J. Math and Math. Sci., 18 (1995) 111–120.

[Hkms] H.Hashimoto, T.Koda, K.Mashimo and K.Sekigawa Extrinsic homogeneous almost Hermitian 6-dimensional submanifolds in the octonions. Kodai Math. J.,30 (2007) 297-321.

[HO] H.Hashimoto and M.Ohashi Orthogonal almost complex structures of hypersurfaces of purely imaginary octonions Hokkaido Mth J. 39 .,(2010) 351-387.

[HsL] W.Y.Hsiang and H.B.Lawson. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. J. Differential geometry., 5 (1971) 1–38.

[KN] S.Kobayashi and K.Nomizu. Foundations of Differential geometry **II.** Wiley-Interscience, New York. 1968.

[T] T.Takahashi Homogeneous hypersurfaces in space of constant curvature. J.Math.Soc.Japan (1970) 395–410.

[TT] R. Takagi and T.Takahashi On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere Differential Geometry, in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, (1972) 469–481.