

# 太さのある弾性曲線の運動 II (Riemann 多様体への一般化)

部分多様体論・湯沢 2018 (2018/12/01)

九州大学 IMI, 大阪大学名誉教授 小磯憲史

## 1. 導入

これは“太さのある弾性曲線の運動” (部分多様体論・湯沢 2002/11/20) の続きである。R. Caffish & J. Maddocks (1984 [1]) は平面弾性曲線の運動方程式を考察し、解の無限時間存在を示した。今回はその高次元 Euclid 空間への一般化を報告した。

**定理 1.1** (KS [6]). Euclid 空間  $\mathbf{R}^n$  において、閉弾性曲線の波動型運動方程式は任意の初期値に対して無限時間の解を持つ。

目的はこの結果を Riemann 多様体に拡張することである。

**定理 1.2** ([8]). 完備 Riemann 多様体  $(M, g)$  において、閉弾性曲線の波動型運動方程式は測地線でない任意の初期値に対して長時間の解を持つ。

弾性エネルギーのみを汎関数とする変分問題の解を **Euler の弾性曲線** と呼ぶ。それは閉弾性曲線の波動型運動方程式の静的な解になっている。本説の主題ではないが、Euler の弾性曲線に簡単に触れておく。この研究は Euler が平面曲線の場合に開始した。空間弾性曲線は幾何学では Langer & Singer に始まる。Euclid 空間  $E^n$  の閉弾性曲線は  $E^3$  の曲線に帰着し、平面曲線は円と  $\infty$  の字型の 2 種のみであり、空間曲線は  $\mathbf{Q} \cap [0, 1/2]$  と 1:1 対応する (1987 [9])。

運動方程式に戻る。まず、 $\mathbf{R}^n$  で考える。本説では  $*_x, *_t$  はすべて偏微分の記号として用いる。 $\gamma = \gamma(x, t)$  を長さ 1 の閉曲線の運動とする。ただし、曲線は伸び縮みしない: 即ち  $|\gamma_x| \equiv 1$  とする。 $\gamma$  の形状エネルギー  $U(\gamma)$  を弾性エネルギー  $\|\gamma_{xx}\|^2$  で定め、運動エネルギー  $F(\gamma)$  を  $\|\gamma_t\|^2 + \|\gamma_{xt}\|^2$  で定める。この  $\|\gamma_{xt}\|^2$  は弾性曲線の太さに起因する項である。

Hamilton の原理により、運動方程式は汎関数  $\int_0^T F(\gamma) - U(\gamma) dt$  の Euler-Lagrange 方程式である。その運動方程式を弾性曲線の波動型運動方程式と呼ぶことにする。

弾性曲線の運動方程式については今までいくつか報告してきたので、それらとの関係を述べておく。いずれの場合も方程式は  $|\gamma_x| = 1$  を強制する Lagrange の未定関数  $u = u(x, t)$  を必要とする。

### $\mathbf{R}^n$ での方程式の種類

(Pr)	$-\gamma_{xxxx} - \gamma_t = (u\gamma_x)_x$	放物型	最小降下法
(Pl)	$-\gamma_{xxxx} - \gamma_{tt} = (u\gamma_x)_x + \lambda\gamma_t$	plate 型	$F = \ \gamma_t\ ^2$ , 抵抗 $\lambda$
(W)	$\gamma_{ttt} - \gamma_{xxxx} - \gamma_{tt} = (u\gamma_x)_x$	波動型	$F = \ \gamma_t\ ^2 + \ \gamma_{xt}\ ^2$

これらの方程式はばらばらではなく、(W) を最も一般型として次のような関係にある。

方程式の関係

(W)	$\implies$	(Pl)	$\implies$	(Pr)
太さ $\rightarrow 0$ (未解決)		$\lambda \rightarrow \infty$ (解決)		

矢印  $\implies$  は方程式の型変化あらかし、特異摂動と呼ばれる。  $\lambda \rightarrow \infty$  のとき (Pl) の解が (Pr) の解に収束することが分かっている。太さ  $\rightarrow 0$  のときも同様な現象が期待されるが、まだ証明されていない。

それぞれの方程式について、ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  の場合と Riemann 多様体  $(M, g)$  の場合の論文は次の通りである。

結果

	$\mathbf{R}^n$	$(M, g)$
(Pr)	無限時間解 (1996 [3])	長時間解 (2000 [4])
(Pl)	線型版 (CH 1966 [2]), 短時間解 (2000 [5])	短時間解 (2015 [7])
(W)	$n = 2$ 無限時間解 (CM 1984 [1]), $\forall n$ 無限時間解 (KS 2010 [6])	長時間解 (今回 [8])

## 2. $\mathbf{R}^n$ での解法

まず、前回の報告である  $\mathbf{R}^n$  での解法を振り返り、 $(M, g)$  への一般化に要する変更点を説明することにする。

**2.1. 方程式の導出.** 閉曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\gamma(1) = \gamma(0)$ ,  $\gamma'(1) = \gamma'(0)$ .  $\gamma$  の汎関数を  $\xi := \gamma_x$  の汎関数に書き直し、その E-L 方程式を求める。

$$(2.1) \quad \begin{cases} \phi + \left( \int_0^1 \kappa_2(x, y) \phi(y) dy \right)^\perp - v^\perp \\ = \left( \int_0^1 \kappa_2(x, y) (|\xi_t(y)|^2 - |\xi_x(y)|^2) \xi(y) dy \right)^\perp, \\ \int_0^1 \phi dx = \int_0^1 (|\xi_t|^2 - |\xi_x|^2) \xi dx, \end{cases}$$

$$(2.2) \quad (\xi_{tt} - \xi_{xx})^\perp = \phi, \quad \xi(1) = \xi(0), \quad \xi_x(1) = \xi_x(0).$$

ここで、 $*^\perp$  は  $\xi(x, t)$  への直交成分で、 $\kappa_2(x, y) := 1 - \max\{x, y\} - (1-x)(1-y)$  は核関数である。 $\phi(x, t)$  は  $\xi$  に沿った  $S^{n-1}$  の未知接ベクトル場、 $v(t)$  は  $\mathbf{R}^n$  値未知関数で、“Lagrange の未定関数” である。

**2.2. 方程式の解法.** 線形積分方程式 (2.1) は積分作用素

$$(2.3) \quad L : \begin{bmatrix} \phi \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \phi + \left( \int_0^1 \kappa_2(x, y) \phi(y) dy \right)^\perp - v^\perp \\ - \int_0^1 \phi dx \end{bmatrix}$$

が自己随伴で固有値が 0 から離れていることを示すことに帰着される. この部分が  $(M, g)$  では“測地線ではないこと”に対応する.

半線形波動方程式 (2.2) を解くことは標準的で, あとは反復法 (縮小写像の原理) に持ち込む.

### 3. $(M, g)$ での解法

#### 3.1. $\mathbf{R}^n$ の方法の変更点.

$\mathbf{R}^n$  での解法をそのまま  $(M, g)$  に持ち込むことはできない.

- (1)  $\xi$  のみの方程式に書き直すことは不可能. それは波動方程式 (2.2) の解法に影響する.
- (2) 積分方程式 (2.1) は  $\mathbf{R}^n$  の線型性を用いている.

これらの困難を克服するために, 以下の手法をとる.

- (1) は一見難しそうだが, 実は反復法では波動方程式 (2.2) の右辺に  $\gamma$  が露わに出てきてもそれほど問題ではない.
- (2) は  $\gamma$  の E-L 方程式を積分したから出てきた. そこで, 積分せずに微分方程式のまま取り扱うことにする.

#### 3.2. $(M, g)$ での解法の骨格.

- (1) E-L 方程式を波動方程式と常微分方程式に分解.
- (2) 縮小写像のための適切な関数空間を設定.
- (3) 個々の方程式をその関数空間で解く. (測地線でないという条件)
- (4) 縮小写像の原理を適用して弱解を構成.
- (5) 解の正則性.  $\Rightarrow$  E-L 方程式の解.
- (6) 短時間解を繋いで長時間解を構成.  $\Leftarrow$  全エネルギー保存則.

以上のうち, 下線 部分が  $(M, g)$  で特に変更を要するところなので, 以下その部分を説明する.

#### 3.3. 方程式の分解. まず E-L 方程式を求め, それを波動方程式と常微分方程式に分解する.

**命題 3.1** (E-L 方程式). 定理の E-L 方程式は次で与えられる.

$$(3.1) \quad \begin{aligned} -\nabla_t \gamma_t + \nabla_x \nabla_t^2 \gamma_x - \nabla_x^3 \gamma_x + \Psi &= \nabla_x (u \gamma_x) \quad (\exists u(x, t)), \\ \Psi &:= R(\gamma_x, \nabla_x \gamma_x) \gamma_x - R(\gamma_x, \nabla_t \gamma_x) \gamma_t. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**命題 3.2** (方程式の分解). E-L 方程式の解  $\gamma$  に対して  $\xi := \gamma_x, \eta := \gamma_t, \theta := \nabla_t^2 \xi - \nabla_x^2 \xi - (u+1)\xi$  とおけば, 次の連立方程式が満たされる.

$$(CS_0) \quad \begin{cases} (E_\theta) & -\nabla_x^2 \theta + \theta^\perp = \nabla_x \Psi + \Phi, \\ (W_\xi) & (\nabla_t^2 \xi - \nabla_x^2 \xi)^\perp = \theta^\perp, \quad |\xi|^2 = 1, \\ (I_\eta) & \nabla_t \eta = \nabla_x \theta + \Psi + \nabla_x \xi, \\ (I_\gamma) & \gamma_t = \eta. \end{cases}$$

ここで,  $\Psi = R(\xi, \nabla_x \xi) \xi - R(\xi, \nabla_t \xi) \eta, \Phi = (|\nabla_t \xi|^2 - |\nabla_x \xi|^2) \xi - R(\xi, \eta) \eta,$

$*^\perp := * - g(*, \xi) \xi.$

逆に、この連立方程式の滑らかな解が  $t = 0$  において整合条件 ( $\xi = \gamma_x, \nabla_t \xi = \nabla_x \gamma_x$ ) を満たせば、 $\gamma$  は E-L 方程式の解である。■

### 3.4. 関数空間の設定. ついで縮小写像のための適切な関数空間を設定する.

線型波動方程式  $\xi_{tt} - \xi_{xx} = f, \xi(x, 0) = a(x), \xi_t(x, 0) = b(x)$  の解は次の公式で与えられる.

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \xi(x, t) = & \frac{1}{2} \{a(x+t) + a(x-t)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} b(y) dy \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau. \end{aligned}$$

半線型波動方程式 ( $W_\xi$ ) の場合には上の  $f$  に  $\xi, \xi_x, \xi_t$  の非線形関数を代入することになる. そのとき、左辺の  $\xi, \xi_x, \xi_t$  は右辺の  $\xi, \xi_x, \xi_t$  の積分で表示される. 従って、( $W_\xi$ ) の自然な関数空間は  $\xi \in C^1(x, t)$  である. そのとき

$$(3.3) \quad (I_\eta) \quad \nabla_t \eta = \nabla_x \theta + \Psi + \nabla_x \xi, \quad (I_\gamma) \quad \gamma_t = \eta$$

から  $\gamma \in C^0(x)$ . ところが  $\nabla_x p = p_x + \Gamma(\gamma_x, p)$  は  $\gamma_x$  を含む. そこで、

$$(3.4) \quad D_x p := p_x + \Gamma(\xi, p), \quad D_t p := p_t + \Gamma(\eta, p)$$

を微分作用素  $\nabla_x, \nabla_t$  の代用にして方程式系 (CS) を定めて解く. その解は滑らかであれば  $\xi = \gamma_x$  を満たし、従って ( $CS_0$ ) の解になる.

以上から、関数空間は  $\xi \in C^1(x, t), \theta \in C_x^1 \cap C_t^0, \gamma, \eta \in C_x^0 \cap C_t^1$  が適当である.

### 3.5. 常微分方程式 ( $E_\theta$ ). 上の関数空間の中で個々の方程式を解く. ここでは測地線でないという条件を反映する ( $E_\theta$ ) についてのみ説明する.

方程式 ( $E_\theta$ ):  $-D_x^2 \theta + \theta^\perp = D_x \Psi + \Phi$  は、 $\gamma(x)$  が測地線なら解けない.  $\gamma(x)$  が測地線から離れているという仮定が必要である. 曲線の曲がり量  $B(\gamma)$  を次で定義する.

$$(3.5) \quad \begin{aligned} B(\gamma, \xi)^2 &:= \inf_{\phi} (L \|D_x \phi\|^2 + L^{-1} \|\phi - \xi\|^2), \\ B(\gamma) &:= B(\gamma, \gamma_x) \quad (L = \gamma \text{ の長さ}) \end{aligned}$$

証明には  $B(\gamma, \xi)$  を用いるが、以下では簡単のため  $B(\gamma)$  で説明する. この定義の下に次の補題が成り立ち、( $E_\theta$ ) を解くことができる.

**補題 3.3.** (1)  $B(\gamma) = 0 \iff \gamma$  が測地線.

(2)  $B(\gamma)$  は  $\gamma$  の  $H^1$  位相に関して連続. 初期値が  $B(\gamma_0) > 0$  を満たせばその  $H^1$  近傍でも  $B(\gamma) \geq \exists B_0 > 0$ .

(3)  $B(\gamma) > 0$  なら、 $u$  の方程式  $-\nabla_x(\nabla_x u + f) + u^\perp = h$  は一意な解を持ち、 $\|\nabla_x \gamma_x\|^2$  のみに依存する  $C$  を用いて次の評価が成り立つ.

$$(3.6) \quad \sup|u|, \sup|\nabla_x u| \leq CB^{-4}(\|f\| + \|h\|). \quad \blacksquare$$

証明に用いる曲がり量  $B(\gamma)$  の性質は上の補題が主であるが、それ自身興味のある対象であると思われるので、いくつか補足しておく.

(1) 常に  $B(\gamma) \leq 1$ .

- (2) 下限  $B(\gamma)$  は  $-L^2 \nabla_x^2 \phi + \phi = \gamma_x$  なる  $\phi$  で実現される。  
 (3)  $B$  は  $\gamma$  の  $H^1$  位相に関して連続なので,  $\gamma$  を折れ線近似できる。  
 (4) 平面上の円  $c$  で  $B(c)^2 = 4\pi^2/(1 + 4\pi^2) \approx 0.975 \dots$

$$\text{平面正 } n \text{ 角形 } p_n \text{ で } B(p_n)^2 = \frac{2n \sin^2(\pi/n) \sinh(1/n)}{\cosh(1/n) - \cos(2\pi/n)} \rightarrow B(c)^2.$$

$$B(p_2)^2 = \frac{4(\sqrt{e} - 1)}{\sqrt{e} + 1} \approx 0.980 \dots$$

#### 参考文献

- [1] R. E. Caflisch and J. H. Maddocks: *Nonlinear dynamical theory of the elastica*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A 99** (1984), 1-23.  
 [2] R. Courant and D. Hilbert: *Methods of mathematical physics Vol. I*, Interscience publishers INC, New York, 1966.  
 [3] N. Koiso: *On the motion of a curve towards elastica*, Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger (Collection SMF, Séminaires & Congrès N° 1), Société Mathématique de France, (1996), 403–436.  
 [4] Convergence towards an elastica in a riemannian manifold, Osaka J. Math. **37** (2000), 467–487.  
 [5] N. Koiso: *On motion of an elastic wire and singular perturbation of a 1-dimensional plate equation*, Osaka J. Math. **37** (2000), 905–924.  
 [6] N. Koiso and M. Sugimoto: *Motion of elastic wire with thickness*, Osaka J. Math. **47** (2010), 787-815.  
 [7] N. Koiso: *On motion of an elastic wire in a Riemannian manifold and singular perturbation*, Osaka J. Math. **52** (2015), 453–473.  
 [8] N. Koiso: *Motion of an elastic wire with thickness in a Riemannian manifold*, arXiv:1809.08015.  
 [9] J. Langer and D. A. Singer: *Curve-straightening in Riemannian manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **5** (1987), 133-150.