$\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3_1$ の曲面に関する Kenmotsu 型公式の統一化と応用

國分 雅敏 (東京電機大学・工学部)

$\mathbb{R}^3$ の極小曲面を記述する公式として，Weierstrass-Enneper の公式が広く知られている．極小曲面ではない場合については,「（単連結）2 次元多様体 M 上に，関数 H と球面への写像 $\boldsymbol{n}$ が与えられたとき，それらを平均曲率および Gauss 写像にもつ $\mathbb{R}^3$ 内の曲面が存在するための必要十分条件を与え，実際にはめ込み関数 $f\colon M \to \mathbb{R}^3$ を構成せよ」という問いに，1979 年，剱持先生 ([4]) が解答を与えた．今では，その曲面を記述する式は Kenmotsu 公式と呼ばれている．

これに続き，Lorentz-Minkowski 空間 $\mathbb{R}^3_1$ の場合にも，空間的曲面については [1] において，時間的曲面については [6] において Kenmotsu 型公式が与えられた．

1 Kenmotsu (型) 公式再訪

論文 [4], [1], [6] では局所座標系を用いて主となる公式が記述されているのだが，それらを座標系なしの形で記述することから始める．

$\mathbb{R}^3_1$ にて，符号 $(++-)$ の 3 次元 Lorentz-Minkowski 空間を表し，M で向き付けられた 2 次元多様体を表す.

1.1 Kenmotsu 公式

Theorem 1.1 ([4], [5])**.** $\mathbf{x}\colon M \to \mathbb{R}^3$ をはめ込みとする．ただし，極小はめ込みではないとする．$\mathbf{x}$ は，平均曲率関数 H と Gauss 写像 $\boldsymbol{n}\colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ により，次式で復元される：

$$\mathbf{x} = -\int \frac{1}{2H}\left\{d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \times (*d\boldsymbol{n})\right\} \tag{1.1}$$

ここで，$*$ は誘導計量に関する M 上の Hodge $*$ 作用素．そして，H, $\boldsymbol{n}$ は次式を満たす：

$$\frac{dH}{H} \wedge \{d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \times (*d\boldsymbol{n})\} = \boldsymbol{n} \times (d * d\boldsymbol{n}) \tag{1.2}$$

逆に，M 上に (1.2) を満たす関数 H と写像 $\boldsymbol{n}\colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ が与えられたならば，それらを平均曲率，Gauss 写像にもつ曲面 $\tilde{\mathbf{x}}\colon \tilde{M} \to \mathbb{R}^3$ が (1.1) により得られる．ここで $\tilde{M}$ は M の普遍被覆を表している．

Remark 1.2. (a) 証明は，局所座標系で記述された証明 ([4]) を丁寧になぞってもよいのだが，構造方程式を一から書いてみるほうが，見通しが良いようである．[5] には，動枠による証明を載せてあるので，そちらを参照されたい．

(b) 後半の主張は「周期条件が満たされれば」という条件を付せば,「M からのはめ込みが得られる」と述べることもできる．

とくに平均曲率 H が一定の曲面（cmc-H 曲面）に限ると，定理は次のように述べられる．

Corollary 1.3. $\mathbf{x}\colon M \to \mathbb{R}^3$ を cmc-H 曲面とし，$\boldsymbol{n}\colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ をその Gauss 写像とする．このとき，$\mathbf{x}$ は次式で復元できる．

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{2H}\left\{\boldsymbol{n} + \int \boldsymbol{n} \times (*d\boldsymbol{n})\right\}. \tag{1.3}$$

そして，$\boldsymbol{n}$ は次の方程式を満たす．

$$\boldsymbol{n} \times (d * d\boldsymbol{n}) = \mathbf{0}. \tag{1.4}$$

を満たす．

逆に，(1.4) を満たす写像 $\boldsymbol{n}\colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ が与えられたとき，公式 (1.3) により cmc-H 曲面 $\mathbf{x}\colon \tilde{M} \to \mathbb{R}^3$ を得ることができる．

Remark 1.4. (a) (1.3) の一部分

$$\mathbf{x}_0 = \int \boldsymbol{n} \times (*d\boldsymbol{n})$$

は Gauss 曲率が一定値 1 の曲面 (cgc-1 曲面) である．これは，cmc 曲面の平行曲面族が cgc 曲面を含むことからも理解できる事実である．なお，ここで登場する cgc-1 曲面は特異点を持ちうるものであることも注意しておく．

(b) (1.4) は $\boldsymbol{n}\colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ が調和写像であるという条件で，$\triangle\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n}$ と言い換えられる．

1.2 Kemmotsu (型) 公式の統一

$\mathbb{R}^3_1$ の曲面についても同様である．上述の定理を含んだ形で述べると次のようになる．

Theorem 1.5 ([4], [1], [6], [5])**.** $\mathbf{x}$ を (i) はめ込み $\mathbf{x}\colon M \to \mathbb{R}^3$, (ii) 空間的はめ込み $\mathbf{x}\colon M \to \mathbb{R}^3_1$, (iii) 時間的はめ込み $\mathbf{x}\colon M \to \mathbb{R}^3_1$ の何れかとする．$\mathbf{x}$ の平均曲率を $H(\neq 0)$, Gauss 写像を $\boldsymbol{n}$ とする．このとき，

$$\mathbf{x} = \int -\frac{1}{2H}\left\{d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \times (*d\boldsymbol{n})\right\}. \tag{1.5}$$

そして，$H, \boldsymbol{n}$ は次式を満たす：

$$\frac{dH}{H} \wedge \{d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \times (*d\boldsymbol{n})\} = \boldsymbol{n} \times (d * d\boldsymbol{n}). \tag{1.6}$$

逆に，M 上に (1.6) を満たす関数 H と写像 $\boldsymbol{n}$ が与えられたならば，それらを平均曲率，Gauss 写像にもつ曲面 $\tilde{\mathbf{x}}\colon \tilde{M} \to \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^3_1)$ が (1.5) により得られる．ここで $\tilde{M}$ は M の普遍被覆を表す．

とくに, (non-zero) cmc-H 曲面の場合に限れば，(1.5) は

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{2H}\left\{\boldsymbol{n} + \int \boldsymbol{n} \times (*d\boldsymbol{n})\right\}$$

(1.6) は

$$\triangle\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n} \ \text{((i), (ii) の場合)}, \qquad \Box\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n} \ \text{((iii) の場合)}$$

と書き表される．

Remark 1.6. (a) 各場合 (i)–(iii) に応じて，Gauss 写像は (i) $\boldsymbol{n}\colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, (ii) $\boldsymbol{n}\colon M \to H^2 \subset \mathbb{R}^3_1$ or (iii) $\boldsymbol{n}\colon M \to S^2_1 \subset \mathbb{R}^3_1$ への写像である．

(b) (ii), (iii) の場合のベクトル積 $\times$ はローレンツ的ベクトル積である．

(c) (iii) の場合の $*$ は Lorentz 面 $(M, [du^2 - dv^2])$ に関する $*$ 作用素である．

2　応用例１：$\mathbb{R}^3_1$ の Delaunay 曲面

$\mathbb{R}^3_1$ の Delaunay 曲面 (平均曲率一定回転面) を可能な限りシンプルに書き下す．そのために，適宜 $\mathbb{R}^3_1$ を $\mathbb{C}\times\mathbb{R}^1_1$ もしくは $\mathbb{R}\times\check{\mathbb{C}}$ と見なす．ここで $\check{\mathbb{C}}$ は実２次元ベクトル空間

$$\check{\mathbb{C}} = \mathbb{R}\oplus j\mathbb{R} = \{a+jb \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

に，積を

$$(a+jb)(c+jd) = ac+bd+j(ad+bc)$$

で定めた可換な $\mathbb{R}$-多元環である．とくに $j^2=1$, $j1=1j=j$ である．$\check{\mathbb{C}}$ の元は，パラ複素数もしくは分裂複素数などと呼ばれる．Lorentz 内積と相性がよいため，$\mathbb{R}^2_1$ と $\check{\mathbb{C}}$ は同一視されることがある．本稿でもそうである．$e^{jx}=\cosh x + j\sinh x$ なる記法もしばしば使われる．

$\sigma=\sigma(u), \gamma=\gamma(u)$ を $\gamma^2-\sigma^2=1$ を満たす実一変数関数の組とする．このとき

(i)

$$(u,v)\mapsto \begin{pmatrix} e^{iv} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ \gamma\end{pmatrix}\in H^2\subset\mathbb{C}\times\mathbb{R}^1_1$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} e^{iv} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \sigma\end{pmatrix}\in S^2_1\subset\mathbb{C}\times\mathbb{R}^1_1$$

(iii)

$$(u,v)\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-jv}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ j\gamma\end{pmatrix}\in H^2\subset\mathbb{R}\times\check{\mathbb{C}}$$

(iv)

$$(u,v)\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-jv}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ j\sigma\end{pmatrix}\in S^2_1\subset\mathbb{R}\times\check{\mathbb{C}}$$

という $\mathbb{R}^2$ からの４つの写像が考えられるが，これらが調和写像であるための方程式はどれも

$$(\sigma'\gamma-\sigma\gamma')'-\sigma\gamma=0 \tag{2.1}$$

である．つまり４つに対して共通の方程式である．ただし，M は共形構造 $[du^2+dv^2]$ もしくは Lorentz 的共形構造 $[du^2-dv^2]$ を持つとする．更に，(2.1) は，その解を Jacobi の楕円関数で簡単に記述することができる．実際，(2.1) の解は

$$\sigma=\mathrm{cs}(u,k),\quad \gamma=\mathrm{ns}(u,k)\qquad (u=\pm u+C)\quad (-\infty<k^2<\infty)$$

である.（ここで，母数 k は任意の実数または純虚数でよいということ.）そしてこれらの調和写像を $\boldsymbol{n}$ として Kenmotsu 公式を適用することで cmc-H 曲面が得られる．今回の場合，回転不変なもの，つまり Delaunay 曲面が得られる．実際，$-2H\mathbf{x}$ は次の通り：

(i) 時間軸回りの空間的 cmc 回転面 (sDS-t)

$$\begin{pmatrix} e^{iv} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\sigma\\ \gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma'/\gamma\\ \int\sigma^2\end{pmatrix}\right\}$$

(ii) 時間軸を回転軸とする時間的 cmc 曲面

$$\begin{pmatrix} e^{iv} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\gamma\\ \sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sigma'/\gamma\\ -\int\gamma^2\end{pmatrix}\right\}$$

(iii) 空間軸を回転軸とする空間的 cmc 曲面

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-jv}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\sigma\\ j\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\int\gamma^2\\ -j\sigma'/\gamma\end{pmatrix}\right\}$$

(iv) 空間軸を回転軸とする時間的 cmc 曲面 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-jv}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\gamma\\ j\sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\int\sigma^2\\ j\sigma'/\gamma\end{pmatrix}\right\}$$

ここに登場した σ'/γ, $\int\sigma^2$ も，

$$\sigma'/\gamma=-\,\mathrm{ds}(u,k),\qquad \int\sigma^2=-\{\mathrm{cs}\,\mathrm{dn}+E\circ\mathrm{am}\}(u,k)$$

というように，楕円関数，楕円積分を用いてシンプルに記述できることを補足しておく．

$\mathbb{R}^3_1$ 内には，他にも回転面はいくつかある．手順は同じなので，曲面の式のみ記しておく．

(v) 空間軸を回転軸とする時間的 cmc 曲面 (2)

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-jv}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}s\\ c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\int c^2\\ -s'/c\end{pmatrix}\right\} \tag{2.2}$$

where $s = k\,\mathrm{sn}(u,k), c = \pm\,\mathrm{dn}(u,k) \quad (u = \pm u + C) \quad (0 < k < \infty)$.

Remark 2.1. (2.2) の母線（ $\{\}$ 内の式）は，$\mathbb{R}^3$ の Delaunay 曲面 の母線と '同じ' である．詳しくは，$\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^3_1)$ の計量構造を無視してしまえば，同じ方程式で定まる曲線ということである．

(vi) 光的軸を回転軸とする空間的 cmc 曲面

$$\frac{P}{2}\left\{\begin{pmatrix}\phi-\frac{1}{\phi}\\ 0\\ \phi+\frac{1}{\phi}\end{pmatrix}-\int\begin{pmatrix}1+\frac{1}{\phi^2}\\ 0\\ 1-\frac{1}{\phi^2}\end{pmatrix}\right\}$$

(vii) 光的軸を回転軸とする空間的 cmc 曲面

$$\frac{P}{2}\left\{\begin{pmatrix}\phi+\frac{1}{\phi}\\ 0\\ \phi-\frac{1}{\phi}\end{pmatrix}-\int\begin{pmatrix}1-\frac{1}{\phi^2}\\ 0\\ 1+\frac{1}{\phi^2}\end{pmatrix}\right\}$$

where

$$P = P(v) = \exp\left\{v\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\right\},$$

$$\phi = u \text{ or } \frac{\sin ku}{k} \qquad (u = \pm u + C) \quad (-\infty < k^2 < \infty, k \neq 0).$$

(vi), (vii) については，初等関数のみで表されることに気づく．

3 平均曲率一定らせん面

本節では Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面に話を限定する．80 年代に Do Carmo-Dajczer [3] は平均曲率一定らせん面を決定した．実際それらは 2 パラメタ族として分類される．ここでは，Kenmotsu 公式で Do Carmo-Dajczer の分類を述べる．その応用として，2, 3 の幾何学的命題が示されることを紹介する．

Lemma 3.1. μ, b を $0 < \mu \leq 1$, $1 \leq b \leq 1/\mu$ を満たす定数とする．

$$\begin{gathered}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}e^{iv} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ig} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{1-\mu^2 b^2\,\mathrm{sn}^2(bu,\mu)}\\ \mu b\,\mathrm{sn}(bu,\mu)\end{pmatrix}\\ \text{where } g = \frac{\sqrt{(1-\mu^2b^2)(b^2-1)}}{b}\mathit{\Pi}(\mathrm{am}(bu,\mu),\mu^2b^2,\mu).\end{gathered} \tag{3.1}$$

により定まる $\boldsymbol{n}\colon (\mathbb{R}^2, [du^2+dv^2]) \to S^2$ は調和写像である．

任意の cmc-H らせん面 $\mathbf{x}$ (cgc-1 らせん面 $\mathbf{x}_0$) は，(3.1) を Gauss 写像とする曲面に合同である．

Proposition 3.2. Lemma 3.1 の $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$ を具体的に記述すると次の通り：

$$-2H\mathbf{x} = \begin{pmatrix}e^{iv/b} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ig(u)} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\{\boldsymbol{n}_0(u)+\check{\mathbf{x}}_0(u)\}+\begin{pmatrix}0\\ c_1 v/b\end{pmatrix}$$

where

$$c_1 = \sqrt{(1-\mu^2b^2)(b^2-1)}, \qquad \boldsymbol{n}_0(u) = \begin{pmatrix}\sqrt{1-\mu^2b^2\,\mathrm{sn}^2}\\ -\mu b\,\mathrm{sn}\end{pmatrix}(u,\mu),$$

$$\check{\mathbf{x}}_0(u) = \begin{pmatrix}\dfrac{\mu b(b\,\mathrm{cn}\,\mathrm{dn}-ic_1\,\mathrm{sn})}{\sqrt{1-\mu^2b^2\,\mathrm{sn}^2}}(u,\mu)\\ (b-1/b)u - bE(\mathrm{am}(u,\mu),\mu)\end{pmatrix}, \qquad g(u) = \frac{c_1}{b}\mathit{\Pi}(\mathrm{am}(u,\mu),\mu^2b^2,\mu).$$

c_1 はらせん運動のピッチ (pitch) を表す．以下では，Proposition 3.2 中の $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}_{\mu,b}$ と表す．

Remark 3.3. (a) 定数 μ を固定したとき，μ をパラメタとする曲面族 $\{\mathbf{x}_{\mu,b} \mid 1 \le b \le 1/\mu\}$ は同伴族（合同ではないものの，同じ平均曲率をもつ等長的な曲面族）である．

(b) $\mathbf{x}_{\mu,1}$ は unduloid であり，$\mathbf{x}_{\mu,\frac{1}{\mu}}$ は nodoid である．

Application 1: らせん面は $\mathbb{R}^2$ からの写像（つまり，２変数関数）により与えられるものだが，特別な場合として，一つの変数に関して周期的となることがある．この場合，$\mathbb{R}\times S^1$ からの写像と捉えることができる．このときのらせん面は，らせん状柱面 (helicoidal cylinder) とよばれる．

cmc-H らせん面 $\mathbf{x}$ (cgc-1 らせん面 $\mathbf{x}_0$) でもそのようなことが起こることを次の定理は主張する．

Theorem 3.4. $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}_0$) がらせん状柱面となるための必要十分条件は，μ, b が

$$\frac{(1-\mu^2b^2)(b^2-1)\Pi(\mu^2b^2,\mu)+b^2E(\mu)+(1-b^2)K(\mu)}{\pi b\sqrt{(1-\mu^2b^2)(b^2-1)}} \in \mathbb{Q}$$

を満たすことである．

この定理は，Burstall-Kilian による次の定理の別証明を与えることとなる．

Corollary 3.5 (Burstall-Kilian's Theorem [2])**.** 任意の Delaunay 曲面の同伴族は，無限個の合同でないらせん状柱面を含む．

Application 2: Do Carmo-Dajczer によって既に指摘されていたことだが，cmc-H らせん面は半径大小の２つの円柱面の間に挟まれるという，ある種の有界性をもつ．この事実も，我々の公式で (μ, b で) 述べることができる．以下 H の値は $H=-1/2$ に固定して命題を述べる．

Proposition 3.6.
- $\mathbf{x}_0(M)$ は，半径 $\mu b\sqrt{b^2-1}$，半径 μb^2 の同心円柱の間に挟まれる．
- $\mathbf{x}(M)$ は，半径 $|1-\mu b^2|$，半径 $1+\mu b^2$ の同心円柱の間に挟まれる．

$R := 1+\mu b^2$, $\rho := |1-\mu b^2|$ と置いて，それぞれ $\mathbf{x}$ の (outer) radius, inner radius と名づけよう．一方，$\mathbf{x}$ のピッチは $\sqrt{(1-\mu^2b^2)(b^2-1)}$ であったことを思い出しておく．

Proposition 3.7. 対応 $(\mu, b) \leftrightarrow$ (pitch, radius) は 1 対 1 である．

Corollary 3.8. • cmc-H らせん面は（合同類）を除いて，pitch と radius で決まる．つまり，cmc-H らせん面の分類 (2 パラメタ族) は，pitch と radius による分類と言える．
• cmc-H らせん面が閉じるかどうか (cmc らせん状柱面となるかどうか) は，pitch と radius で決まる．

Theorem 3.9. 2 つの cmc-H らせん面が同じ同伴族に属するための必要十分条件は

$$\frac{\lambda^2+\rho^2}{\lambda^2+R^2}\left(=\frac{\lambda^2+(R-2)^2}{\lambda^2+R^2}\right)$$

の値が一致することである．

Corollary 3.10. unduloid と nodoid が局所等長的であるための必要十分条件は，inner radius ρ と outer radius R の比

$$\frac{\rho}{R}$$

が一致することである．

参考文献

[1] K. Akutagawa and S. Nishikawa, The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, Tohoku Math. J. 42 (1990) 67–82.

[2] F. E. Burstall and M. Kilian, Equivariant harmonic cylinders, Quart. J. Math. 57 (2006) 449–468.

[3] M. P. do Carmo and M. Dajczer, Helicoidal surfaces with constant mean curvature, Tohoku Math. J. (2) 34 (1982) 425–435.

[4] K. Kenmotsu, Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, Math. Ann. 245 (1979) 89–99.

[5] M. Kokubu, Application of a unified Kenmotsu-type formula for surfaces in Euclidean or Lorentzian three-space, preprint, arXiv:1711.05427.

[6] M. A. Magid, Timelike surfaces in Lorentz 3-space with prescribed mean curvature and Gauss map, Hokkaido Math. J. 19 (1991) 447–464.

その他の参考文献・関連する論文は [5] の参考文献リストにあるものを参照されたい.