ON CLASSIFICATIONS OF LEFT-INVARIANT LORENTZIAN METRICS ON SOME NILPOTENT LIE GROUPS

近藤 裕司 (広島大学大学院理学研究科博士課程前期 2 年)

Abstract. 3 次元 Heisenberg 群 H_3 の上には, スカラー倍と等長の違いを除いて, 左不変 Lorentz 計量がちょうど 3 つ存在することが知られている ([4]). 本講演では, $H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ $(n \geqq 4)$ 上の左不変 Lorentz 計量を分類し, スカラー倍と自己同型の違いを除いてちょうど 6 つ存在するということを示す. さらに, ある種の特別な計量の存在についても示す.

1. Introduction

Riemann と 擬 Riemann の両方の場合において, Lie 群上の左不変計量の分類が盛んに研究されている. 特に Riemann の場合においては, n 次元実 Lie 群 G 上にスカラー倍と等長の違いを除いて左不変 Riemann 計量がただ 1 つ存在するための必要十分条件が, G が $\mathbb{R}^n$, n 次元実双曲空間の Lie 群 $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ あるいは, $H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ のどれかと Lie 群として同型であることということが示されている ([1, 3]). また擬 Riemann の場合でも, これらの 3 つの Lie 群上の左不変擬 Riemann 計量の分類が部分的には得られている ([2, 4]). これらの先行研究の結果をまとめると次のようになる.

	左不変 Riemann 計量	左不変擬 Riemann 計量
$\mathbb{R}^n$	1	1
$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$	1	3
$H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$	1	3 $(n = 3)$, ???$(n \geqq 4)$

しかし, $H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ $(n \geqq 4)$ に対しては, そのような分類はまだ得られていない. また一方 [5] の中では, 放物型部分群による対称空間への群作用の軌道の有限性について調べられている. 本研究で考察する群作用は, 簡約型擬 Riemann 対称空間への放物型部分群による作用になっており, 本研究はこのような観点においても関連するものになっている. 本講演では, $H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ $(n \geqq 4)$ 上の左不変 Lorentz 計量がスカラー倍と自己同型の違いを除いて 6 つ存在することを示し, それらが特別な計量であることも示す.

2. Main result

実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して,

$$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{c\varphi \mid c \in \mathbb{R}^{\times}, \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\}$$

部分多様体論・湯沢 2018 (湯沢グランドホテル, 2018 年 11 月 29 日–12 月 1 日) 講演記録.

とおく. また,

$$\mathfrak{M}_{(p,q)} := \{\mathfrak{g}\text{ 上の符号数 }(p,q)\text{ の内積 }\}$$

とする. このとき, $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{M}_{(p,q)}$ に対して,

$$(c\varphi).\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle(c\varphi)^{-1}(\cdot),(c\varphi)^{-1}(\cdot)\rangle$$

により作用する.

定義 2.1. $\mathfrak{g}$ を $p+q$ 次元実 Lie 代数とする. $\langle,\rangle_1,\langle,\rangle_2 \in \mathfrak{M}_{(p,q)}$ が **スカラー倍の違いを除いて等長** であるとは, 次が成り立つこと:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1 \in \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle\cdot,\cdot\rangle_2.$$

以下では, $n \geqq 4$ とし, $\mathfrak{h}_3$ を 3 次元 Heisenberg Lie 代数とする. 本研究で考察する軌道空間は, $\mathfrak{g} := \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ としたときに,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \setminus \mathfrak{M}_{(n-1,1)} :=& \{\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle,\rangle \mid \langle,\rangle \in \mathfrak{M}_{(n-1,1)}\} \\ =& \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \setminus \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n-1,1)\end{aligned}$$

であるが, この Lie 代数に対して $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の放物型部分群になることがわかっている ([1]). この放物型部分群による対称空間への作用の軌道空間を決定することで, 次の定理を示した.

定理 2.2. $\mathfrak{g} := \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ 上の符号数 $(n-1,1)$ の任意の内積 $\langle,\rangle$ に対して, ある $k>0, (\lambda,\xi) \in \{(0,0),(1,0),(1,1),(2,0),(2,\sqrt{3}),(2,2)\}$ と, $k\langle,\rangle$ に関する擬正規直交基底 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ が存在して,

$$[x_1,x_2] = -(\lambda x_1 - x_n),\ [x_2,x_{n-1}] = \xi(\lambda x_1 - x_n),\ [x_2,x_n] = \lambda(\lambda x_1 - x_n)$$

が成り立つ.

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, $Z(\mathfrak{g})$ と $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ で, それぞれ $\mathfrak{g}$ の中心と導来イデアルを表すことにする. 定理 2.2 内の bracket relations から, 次のことを得る.

命題 2.3. $\mathfrak{g} := \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ とする. $\mathfrak{g}$ 上の符号数 $(n-1,1)$ の内積は以下の 6 種類に分類される:

(λ,ξ)	$Z(\mathfrak{g})$ 上の符号数	$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上の符号数
$(0,0)$	$(n-3,1,0)$	$(0,1,0)$
$(1,0)$	$(n-3,0,1)$	$(0,0,1)$
$(1,1)$	$(n-3,1,0)$	$(0,0,1)$
$(2,0)$	$(n-2,0,0)$	$(1,0,0)$
$(2,\sqrt{3})$	$(n-3,0,1)$	$(1,0,0)$
$(2,2)$	$(n-3,1,0)$	$(1,0,0)$

(ただし, 符号数は $(+,-,0)$ の順で表記している.)

この命題から, 次のことがわかる.

定理 2.4. $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ 上には, スカラー倍と等長の違いを除いて符号数 $(n-1,1)$ の内積がちょうど 6 つ存在する.

この定理から, $H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ 上の左不変 Lorentz 計量がスカラー倍と自己同型の違いを除いて, ちょうど 6 つ存在することがわかる.

$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ を, $\mathfrak{g}$ 上の微分代数とする. 内積付き Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ に対して, 以下のようなものが定義される.

定義 2.5.

(i) **代数的 Ricci soliton** であるとは, ある $c \in \mathbb{R}$ と $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して, $\mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id} + D$ が成り立つこと.

(ii) **Einstein** であるとは, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して, $\mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id}$ が成り立つこと.

(iii) **flat** であるとは, 曲率テンソル R が $R \equiv 0$ を満たすこと.

ここで, Ric は $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ の Ricci 曲率である.

定理 2.4 で得られた 6 つの内積に対して, 次のことを得た.

命題 2.6. $(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}, \langle , \rangle)$ が flat になるような内積は $(\lambda, \xi) = (1, 0)$ に対応するものただ 1 つであり, 他の 5 つは全て, 代数的 Ricci soliton ではあるが Einstein ではない.

このことから, $H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ 上の左不変 Lorentz 計量は, スカラー倍と自己同型の違いを除いて, 1 つだけ flat なものであり, 残りの 5 つは全て Ricci soliton であるが Einstein ではないことがわかる.

References

[1] Kodama, H., Takahara, A., Tamaru, H.: *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling.* Manuscripta Math. **135** (2011), 229–243.

[2] Kubo, A., Onda, K., Taketomi, Y., Tamaru, H.: *On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups.* Hiroshima Math. J. **46** (2016), 357–374.

[3] Lauret, J.: *Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups.* Differential Geom. Appl. **18** (2003), no. 2, 177–194.

[4] Rahmani, S.: *Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois.* J. Geom. Phys. **9** (1992), no. 3, 295–302.

[5] Wolf, J. A.: *Finiteness of orbit structure for real flag manifolds.* Geometriae Dedicata **3** (1974), 377–384.