一般化された直交対称性による
特殊ラグランジュ部分多様体の構成

落合　亮文

平成 31 年 1 月 31 日

部分多様体論・湯沢 2018

1. 導入

Harvey と Lawson [1] によって，キャリブレート部分多様体と呼ばれる Riemann 多様体の部分多様体に関する一つのクラスが導入された．キャリブレート部分多様体はホモロジー類内で体積最小という顕著な性質を持つ．アンビエント空間が Calabi-Yau 多様体 (M, I, ω, Ω) であるとき，M の部分多様体であって，M 上の Calabi-Yau 構造に適合する正則体積形式 Ω の実部でキャリブレートされるものは，M の特殊 Lagrange 部分多様体であると呼ばれる．従って特殊 Lagrange 部分多様体はホモロジー類内で体積最小である．他方，Strominger-Yau-Zaslow 予想によれば，複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体とそのミラーは，同一の底空間を持つ特異点付き特殊 Lagrange トーラス・ファイブレーションによって結びついているとされる．これらのことから特殊 Lagrange 部分多様体の構成法や特異点の研究などに関心が持たれている．

Joyce [3] は，$\mathbb{C}^n$ 内の与えられた特殊 Lagrange 部分多様体 L に対し，L に直交する可換 Lie 群の作用とモーメント写像を用いて，$\mathbb{C}^n$ 内の別の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する方法を示した．本研究ではこの結果を次の三点で一般化する．(g1) アンビエント空間を一般の Calabi-Yau 多様体とする，(g2) 群に対する可換性を仮定しない，(g3) 群作用の直交条件を緩める（広義の直交作用）．また本研究の一般論を用い，非平坦 Calabi-Yau 多様体 T^*S^n において非自明な具体例を構成した．

本研究のもう一つの先行研究に Konno [4] が挙げられる．Konno は Calabi-Yau 多様体内の Lagrange 部分多様体に直交する可換群の作用とモーメント写像を用いて，Lagrange 平均曲率流の構成法を示し，非平坦 Calabi-Yau 多様体において具体例の構成に成功している．

2. 準備

$(M^{2n}, I, \omega, \Omega)$ を $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体とする．ここに I, ω, Ω はそれぞれ M 上の Calabi-Yau 構造を成す複素構造，Kähler 形式，正則体積形式である．L を M の向きづけられた Lagrange 部分多様体とするとき，**Lagrange 角度**と呼ばれる関数 $\theta : L \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ が次式で定義される:

$$\iota^*\Omega = e^{\sqrt{-1}\theta}\mathrm{vol}_{\iota^* g}.$$

ここに $\iota : L \to M$ は埋め込み，g は (M, I, ω) の Kähler 計量である．L が向きづけ可能でない場合も上式によって局所的な Lagrange 角度が定義される．

定義 1 *Calabi-Yau* 多様体 (M, I, ω, Ω) の *Lagrange* 部分多様体 L はその *Lagrange* 角度が一定であるとき，M の**特殊 *Lagrange* 部分多様体**であると言われる．

H をシンプレクティック多様体 (M,ω) に作用する Lie 群とする．H の双対 Lie 環 $\mathfrak{h}^*$ には余随伴作用と呼ばれる H 作用が存在する．これを $\mathrm{Ad}_h^*:\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}^*(h\in H)$ で表す．

定義 2 **モーメント写像** $\mu:M\to\mathfrak{h}^*$ *とは* H *同変かつ次式を満たすものである:*

$$-\mathfrak{i}(\xi^{\#})\omega=d\langle\mu(\cdot),\xi\rangle\quad(\xi\in\mathfrak{h}).$$

3. 主結果

(M^{2n},I,ω,Ω) を連結な Calabi-Yau 多様体，H を M に作用する連結リー群で I と ω を保つものとする．各 $h\in H$ に対し，h による移動を $L_h:M\to M$ で表す．

補題 1 $a_H\in\mathfrak{h}^*$ *が存在し，各* $h\in H$ *に対し次の関係式が成り立つ:*

$$L_h^*\Omega=e^{\sqrt{-1}\langle a_H,\eta_1,\cdots,\eta_l\rangle}\Omega.$$

ここに $\eta_1,\cdots,\eta_l$ は $h=\exp\eta_1\cdots\exp\eta_l$ を満たす $\mathfrak{h}$ の元である．またこのとき $a_H=0$ となるための必要十分条件は H が Ω を保つことである．

さらに H がモーメント写像 $\mu:M\to\mathfrak{h}^*$ を持つものとする．このとき次が成り立つ:

定理 1 L *を* M *の Lagrange 部分多様体で局所的な Lagrange 角度が* θ *で与えられるものとする．* $c\in\mathfrak{h}^*$ *に対し* V_c *を* $V_c\subset L\cap\mu^{-1}(c)$ *なる* M *の部分多様体とする．このとき次の条件が成立していると仮定する:*

(Imm-istp) 各点 $p\in V_c$ における固定部分群 H_p は一定の K に等しい，

(Istp-cnt) c は $\mathfrak{h}^*$ の中心 $Z(\mathfrak{h}^*):=\{c\in\mathfrak{h}^*\mid\mathrm{Ad}_h^*c=c\ (h\in H)\}$ の元である，

(Lag-dim) $\dim L+\dim(H/K)=n$,

(LagAng-H) *(i)* $\xi_p^{\#}\in\mathrm{T}_p^{\perp}L\oplus\mathrm{T}_pV_c$, *(ii)* $\xi_p^{\#}\notin\mathrm{T}_pV_c\backslash\{0\}\quad(p\in V_c,\xi\in\mathfrak{h})$.

このとき写像 $\phi:(H/K)\times V_c\to M$ *を* $\phi(hK,p)=hp$ *により定義すれば，*ϕ *は Lagrange はめ込みであり，その局所的な Lagrange 角度* $\theta_c:(H/K)\times V_c\to\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *は次式で与えられる:*

$$\theta_c(hK,p)=\langle a_H,\eta_1+\cdots+\eta_l\rangle+\theta(p)-\frac{\pi}{2}\dim(H/K).$$

ここに $\eta_1,\cdots,\eta_l$ は $h=\exp\eta_1\cdots\exp\eta_l$ を満たす $\mathfrak{h}$ の元である．

系 1 *定理の条件のもと，*θ *が* V_c *上一定でありかつ* $a_H=0$ *ならば，*ϕ *は特殊 Lagrange はめ込みである．*

4. 具体例の構成

本研究では上の結果に基づく特殊 Lagrange 部分多様体の具体的な構成を球面 $S^n=SO(n+1)/SO(n)$ の余接束 T^*S^n において行った．真に広義の直交作用 (g3) による構成の例として Hopf ファイブレーションの群作用 $H=U(1)$ による場合，非可換群の作用 (g2) による構成の例として $H=SO(2)\times SO(2)\times SO(3)$ による場合をそれぞれ示した．Hashimoto と Sakai[2] は $SO(p)\times SO(q)$ $(p+q=n+1)$ 不変な T^*S^n 内の全ての特殊 Lagrange 部分多様体を構成し，それらが余等質性 1 であることを示した．本研究の $SO(2)\times SO(2)\times S0(3)$ による例において特殊 Lagrange 部分多様体は $2=\dim Z(\mathfrak{h}^*)$ パラメーター族で得られ，この作用が構成された特殊 Lagrange 部分多様体に余等質性 2 で作用していることが直接に確かめられる．

参考文献

[1] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[2] K. Hashimoto and T. Sakai, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere*, Tohoku Math. J. (2) **64** (2012), no. 1, 141–169.

[3] D. D. Joyce, *Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries*, Duke Math. J. **115** (2002), no. 1, 1–51.

[4] H. Konno, *Lagrangian mean curvature flows and moment maps*, to appear in Geom Dedicata (2018), DOI: 10.1007/s10711-018-0331-8.