一般化された s 多様体の対蹠集合

大野　晋司

対称空間は Cartan によって 1920 年代に導入された多様体のクラスである．対称空間には, いくつかの同値な定義が知られている．Nagano は以下のように対称空間を定義した．

Definition 1. C^∞ 級多様体 M が対称空間であるとは, 各 $x \in M$ に対して, M の微分同相 s_x が定まっていて,

1. $s_x \circ s_x = \mathrm{id}_M$,
2. x は s_x の孤立固定点　$(x \in M)$,
3. $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x \quad (x,\ y \in M)$

が成り立つ時に言う．s_x を x における点対称と呼ぶ.

対称空間には, Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$, 球面 S^n, 実双曲空間 $\mathbb{H}^n$ などの実空間系と呼ばれる定曲率空間や, グラスマン多様体, コンパクト Lie 群などが含まれている．

Chen と Nagano は 1978 年の論文 ([CN1]) 以降の一連の論文で, 対称空間の構造から定まる極地と子午空間, 対蹠集合, 2-number などについて研究を行なっている ([CN2] 等)．これらの研究の結果が Chen-Nagano 理論と呼ばれている．特筆すべき結果として, 極地と子午空間の対による対称空間の決定, 2-number によるコンパクト対称空間のオイラー数の評価, などが挙げられる．

一方で, 対称空間の一般化概念は, Ledger(1967) が導入した s-多様体, Lutz(1981) が導入した Γ 対称空間などが知られている．s 多様体は対称空間の定義から条件 1. と 3. を外して定義される．s 多様体に 3. の条件を加えたものは regular な s 多様体と呼ばれている．一般に s 多様体は等質空間とは限らないが, 各 s_x で不変な Riemann 計量を許容する場合は等質空間になる (cf. [Kow])．

Γ 対称空間は等質空間のクラスである．Lie 群 G の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ の有限可換部分群 Γ の作用で固定される G の部分群 H について, G/H で定まる商多様体が Γ 対称空間と呼ばれる．regular な s 多様体と本稿で扱う一般化された s 多様体は regular な s 多様体と Γ 対称空間の一般化概念であり, したがって対称空間の一般化概念でもある．

まずは一般化された s 多様体の定義を与える．

Definition 2. M を C^∞ 級多様体, Γ を群とする．各点 $x \in M$ に対して群準同型 $\varphi_x : \Gamma \to \mathrm{Diff}(M)$ が定まり次の条件を満たすとき, $(\Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を M 上の**一般化された s 構造**と呼び, $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を**一般化された s 多様体**と呼ぶ.

(1) 任意の $x, y \in M$, $\gamma, \delta \in \Gamma$ に対して, $\varphi_x(\gamma) \circ \varphi_y(\delta) \circ \varphi_x(\gamma)^{-1} = \varphi_{\varphi_x(\gamma)(y)}(\gamma\delta\gamma^{-1})$ が成り立つ.

(2) 任意の $x \in M$ に対して, x は $\varphi_x(\Gamma)$ の M への作用の孤立固定点である.

対称空間は $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ のときの一般化された s 構造を持つ．したがって, 一般化された s 多様体は対称空間の拡張である．より一般に k 対称空間は $\Gamma = \mathbb{Z}_k$ のときの一般化された s 構造を持つことも分かる (cf. [Kow]).

Chen-Nagano はコンパクト Riemann 対称空間に対して, 極地と対蹠集合の概念を導入し, 対蹠集合の濃度の上限として 2-number と呼ばれる不変量を定義した (cf. [CN2]). これらの概念を一般化された s 多様体に対して定義する.

Definition 3. $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を一般化された s 多様体とする．各点 $x \in M$ に対して, x における対称変換 $\varphi_x(\Gamma)$ による固定点集合

$$\mathrm{Fix}(\varphi_x(\Gamma), M) = \{y \in M \mid \varphi_x(\gamma)(y) = y \ (\forall \gamma \in \Gamma)\}$$

の連結成分を**極地**と呼ぶ．特に, 1 点からなる極地を**極**と呼ぶ．一般化された s 構造の条件 *(2)* より, 1 点集合 $\{x\}$ は x の極になるので $\{x\}$ を**自明な極**と呼ぶ.

Definition 4. $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を一般化された s 多様体とし, A を M の部分集合とする．任意の $x, y \in A$ と任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して, $\varphi_x(\gamma)(y) = y$, $\varphi_y(\gamma)(x) = x$ が成り立つとき, A を M の**対蹠集合**と呼ぶ．さらに, M の対蹠集合 A が, 任意の対蹠集合 $A' \subset M$ に対して $A \subset A'$ ならば $A = A'$ を満たすとき, A を M の**極大対蹠集合**と呼ぶ．M の対蹠集合の濃度の上限を M の**対蹠数**と呼び, $\#_\Gamma(M)$ で表す．特に, $\#_\Gamma(M) = \#A$ を満たす対蹠集合 A を M の**大対蹠集合**と呼ぶ.

修士論文 [Tera] では実旗多様体 $F_{1,2}(\mathbb{R}^5)$ に対して $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ としたときの一般化された s 構造を考え, その極大対蹠集合の合同類と対蹠数を決定した．より一般の旗多様体に対しても一般化された s 構造を導入し, 極大対蹠集合と対蹠数を決定することができる．この結果を説明するために旗多様体とその一般化された s 構造を次のように定める.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とする．$n_1 + \cdots + n_r < n$ を満たす自然数 $n, n_1, \ldots, n_r$ に対して, 旗多様体 $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ を

$$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n) = \left\{ x = (V_1, \ldots, V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \text{ 部分空間} \\ \dim V_i = n_1 + \cdots + n_i \ (i = 1, \ldots, r) \end{array} \right\}$$

で定める．$F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ には以下のようにして一般化された s 構造が定まる．各点 $x = (V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ に対して，$s_{V_i} = 2P_{V_i} - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ $(i = 1, \dots, r)$ と定める． ここで，P_{V_i} は $\mathbb{K}^n$ から V_i への直交射影である．すなわち，s_{V_i} は部分空間 V_i に関する鏡映である．各 s_{V_i} は $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ の微分同型写像を誘導し，$s_{V_1}, \dots s_{V_r}$ で生成される群は $\mathbb{Z}_2$ の直積 $(\mathbb{Z}_2)^r = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型となる．したがって，$\Gamma = (\mathbb{Z}_2)^r$ とすることによって $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ は一般化された s 多様体となる．特に，$r = 1$ のとき $F_{n_1}(\mathbb{R}^n)$ は Grassmann 多様体であり，$\Gamma = \mathbb{Z}_2$ であるから対称空間である．

$(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を一般化された s 多様体とする．

Definition 5. $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$，$(N, \Delta, \{\psi_y\}_{y\in N})$ を一般化された s 多様体とする．

1. C^∞ 級写像 $f : M \to N$ と群準同型 $\Phi_x : \Gamma \to \Delta$ の族 $\{\Phi_x\}_{x\in M}$ の組 $(f, \{\Phi_x\}_{x\in M})$ が準同型であるとは，各 $x \in M, \gamma \in \Gamma$ に対して，

$$f \circ \varphi_x(\gamma) = \psi_{f(x)}(\Phi_x(\gamma)) \circ f$$

   がなりたつときにいう．

2. 準同型 $(f, \{\Phi_x\}_{x\in M})$ が同型であるとは，f が微分同相で，任意の $x \in M$ について Φ_x が群同型であるときに言う ．また，同型 $(f, \{\Phi_x\}_{x\in M})$ が存在するとき，$(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ と $(N, \Delta, \{\psi_y\}_{y\in N})$ は同型であるという．

Remark 6. 各 $x \in M, \gamma \in \Gamma$ に対して，$\varphi_x(\gamma)$ は準同型である．

一般化された s 多様体に対して，対称空間の場合と同様に，部分空間の概念が定義できる．

Definition 7. $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を一般化された s 多様体とする．M の部分多様体 X が M の部分空間であるとは，任意の $x \in X, \gamma \in \Gamma$ に対して，$\varphi_x(\gamma)(X) = X$ が成り立つ時にいう．

Proposition 8. M の部分空間 X に対して，$(X, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ は一般化された s 多様体である．

Proof. 任意の $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$ について，$\varphi_x(\gamma)|_X \in \mathrm{Diff}(X)$ であるから，φ_x は群準同型 $\Gamma \to \mathrm{Diff}(X)$ を誘導する．M が一般化された s 多様体であることから，

(1) 任意の $x, y \in X$, $\gamma, \delta \in \Gamma$ に対して，$\varphi_x(\gamma) \circ \varphi_y(\delta) \circ \varphi_x(\gamma)^{-1} = \varphi_{\varphi_x(\gamma)(y)}(\gamma\delta\gamma^{-1})$ が成り立つ．

(2) 任意の $x \in X$ に対して，x は $\varphi_x(\Gamma)$ の M への作用の孤立固定点である．

が成り立つことはすぐにわかる. □

Corollary 9. *M の部分空間 X に対して, 包含写像 $\iota : X \to M$ は準同型である.*

Proof. 各 $x \in X$ について, $\Phi_x = \mathrm{id}_\Gamma$ とすれば良い. □

対蹠集合と準同型の間の関係について考える. つぎの命題がすぐにわかる.

Proposition 10. *$(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x \in M})$, $(N, \Delta, \{\psi_y\}_{y \in N})$ をそれぞれ一般化された s 多様体とし, $(f, \{\Phi_x\}_{x \in M})$ を準同型とする.*

1. *$A \subset M$ を対蹠集合とし, $a \in A$ に対して, Φ_a が全射であるとする. このとき, $f(A) \subset N$ は対蹠集合である.*
2. *$B \subset N$ を対蹠集合とし, f が単射であるとする. このとき, $f^{-1}(B) \subset M$ は対蹠集合である.*

Proof. 1. について, 任意の $y_1, y_2 \in f(A)$ と $\delta \in \Delta$ に対して, 像の定義から, $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ なる $x_1, x_2 \in A$ が存在し, Φ_{x_1}, Φ_{x_2} の全射性から, ある $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ について, $\delta = \Phi_{x_1}(\gamma_1) = \Phi_{x_2}(\gamma_2)$ が成り立つ. このとき,

$$\psi_{y_1}(\delta)y_2 = \psi_{f(x_1)}(\Phi_{x_1}(\gamma_1))f(x_2) = f(\varphi_{x_1}(\gamma_1)x_2) = f(x_2) = y_2$$
$$\psi_{y_2}(\delta)y_1 = \psi_{f(x_2)}(\Phi_{x_2}(\gamma_2))f(x_1) = f(\varphi_{x_2}(\gamma_2)x_1) = f(x_1) = y_1$$

よって, $f(A)$ は対蹠集合である.

2. について, 任意の, $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$, $\gamma \in \Gamma$ に対して,

$$f(\varphi_{x_1}(\gamma)x_2) = \psi_{f(x_1)}(\Phi_{x_1}(\gamma))f(x_2) = f(x_2)$$
$$f(\varphi_{x_2}(\gamma)x_1) = \psi_{f(x_2)}(\Phi_{x_2}(\gamma))f(x_1) = f(x_1)$$

がそれぞれ成り立つから, f の単射性から,

$$\varphi_{x_1}(\gamma)x_2 = x_2,\ \varphi_{x_2}(\gamma)x_1 = x_1$$

が成り立つ. □

Corollary 11. *$N \subset M$ が部分空間であれば, $\#_\Gamma(N) \leq \#_\Gamma(M)$*

Proof. 包含写像 $\iota : N \to M$ について, $(\iota, \mathrm{id}_\Gamma)$ は準同型であり, id_Γ は全射である. また, ι は明らかに単射で, N の大対蹠集合 A について, $\iota(A) \subset M$ は対蹠集合で,

$$\#_\Gamma(N) = \#(A) = \#(\iota(A)) \leq \#_\Gamma(M)$$

が従う. □

[Tera] の結果を一般化することによって次の定理が得られる.

Theorem 12. *1.* 旗多様体 $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ の極大対蹠集合は

$$\begin{aligned} A = \{ & (\langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{n_1}} \rangle_{\mathbb{K}}, \langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{n_1+n_2}} \rangle_{\mathbb{K}}, \dots, \langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{n_1+\cdots+n_r}} \rangle_{\mathbb{K}}) \\ & \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_{n_1} \le n,\ 1 \le i_{n_1+1} < \cdots < i_{n_1+n_2} \le n, \dots, \\ & \quad 1 \le i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots < i_{n_1+\cdots+n_r} \le n, \\ & \quad \#\{i_1, \dots, i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1 + \cdots + n_r \} \end{aligned}$$

と合同になる．ここで，$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{K}^n$ の標準基底である．

2.

$$\#_\Gamma(F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)) = \#A = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!n_{r+1}!}.$$

ただし，$n_{r+1} = n - (n_1 + \cdots n_r)$.

さらに，Sánchez [Sa] の結果と合わせると次の系を得る．

Corollary 13.

$$\#_\Gamma(F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)) = \dim H_*(F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n); \mathbb{Z}_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!n_{r+1}!}.$$

参考文献

[CN1] B-Y. Chen and T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. II*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 2, 405–425.

[CN2] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[Kow] O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **805**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[Sa] C. Sánchez, *The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi's*, Proc. Amer. Math. Soc. **125**, (1997), 893–900.

[Tera] 寺内泰紀, Γ 対称空間の対蹠集合, 首都大学東京 修士論文, 2018.

[Kol] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 2, 571–612.

[Kow] O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **805**,Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.