

# 3次元特異擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{0,2,1}$ 内の $d$ -極小曲面

佐藤 雄一郎 (首都大学東京)\*

## 序

リーマン多様体の拡張，一般化に関して様々な方向がある．例えば，フィンスラー多様体や擬リーマン多様体，サブリーマン多様体などが挙げられる．本講演では，多様体上に退化する計量を許すという別の一般化を考え，一つの具体的な例における曲面論について結果を報告する．

符号  $(p, q, r)$  の  $m$  次元特異擬ユークリッド空間 ([14]) を

$$\mathbb{R}^{p,q,r} := \left( \mathbb{R}^m, (\cdot, \cdot) = - \sum_{i=1}^p dx_i^2 + \sum_{j=p+1}^{p+q} dx_j^2 + \sum_{k=p+q+1}^m 0 dx_k^2 \right)$$

で定める．ここで， $m = p + q + r$ ， $p \leq q$  であり， ${}^t(x_1, \dots, x_m)$  は  $\mathbb{R}^m$  の標準座標を表す．このとき，次のことが分かる．

- $r = 0$  のとき， $\mathbb{R}^{p,q,0}$  は指数  $p$  の擬ユークリッド空間と呼び， $\mathbb{R}_p^m$  と表す．
- $p = r = 0$  のとき， $\mathbb{R}^{0,m,0} = \mathbb{R}_0^m$  は標準的なユークリッド空間  $\mathbb{R}^m$  に他ならない．

以下，符号  $(0, 2, 1)$  の3次元特異擬ユークリッド空間  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  の曲面論を考える．また筆者 [13] は，擬ユークリッド空間  $\mathbb{R}_p^m$  内の極小線織面の分類について研究し，ある種の曲面が誘導される計量が退化する部分空間に含まれることを示した．このことに動機付けられて退化した計量を持つ微分幾何学，特に曲面論を考える．

## 特異擬ユークリッド空間内の $d$ -極小曲面

この節では， $M$  を連結な2次元多様体とし， $\mathbb{R}^3$  の標準座標を  ${}^t(x, y, z)$  として， $\mathbb{R}^{0,2,1} := (\mathbb{R}^3, (\cdot, \cdot) = dx^2 + dy^2)$  とする． $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{0,2,1}$  を  $C^\infty$  級はめ込みとし， $f$  による誘導計量を  $g$  で表し，正定値であると仮定する．このとき，はめ込み  $f$  を非退化はめ込み， $M$  を非退化曲面と呼ぶことにする． $\mathbb{R}^{0,2,1}$  上の接続は， $\mathbb{R}^3$  上の標準接続  $d$  とする．すなわち， $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$  に対し， $Y$  をベクトル値関数  $Y = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$  と同一視し，

$$d_X Y := dX(Y) = {}^t(X(Y_1), X(Y_2), X(Y_3)) \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$$

である．このとき， $d$  は計量  $(\cdot, \cdot)$  を保ち，振率テンソル場が消える接続である．すなわち，レビ・チビタ接続の役割を果たす． $\mathbb{R}^{0,2,1}$  と標準接続  $d$  に関して，自己同型群を

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{R}^{0,2,1}, d) &:= \{A \in \text{Diff}(\mathbb{R}^3) \mid A^*d = d, A^*(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)\} \\ &= O(0, 2, 1) \times \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

部分多様体論・湯沢 2018 講演記録.

\* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 首都大学東京 理学研究科  
e-mail: satou-yuuichirou@ed.tmu.ac.jp

で定め、アファイン等長変換群と呼ぶことにする。ここで、

$$O(0, 2, 1) := \left\{ \left( \begin{array}{cc|c} T & 0 & \\ \hline a & b & c \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0, T \in O(2) \right\}$$

である。また、誘導計量  $g$  が非退化より、 $M$  の法束  $T^\perp M$  が定義され、これは階数 1 の自明束  $M \times \mathbb{R}$  と同型であり、定ベクトル場  $\xi = {}^t(0, 0, 1)$  で生成される。特に、ベクトル束の分解として、次が成立する。

$$f^*T\mathbb{R}^3 = TM \perp T^\perp M.$$

ここで、 $\perp$  は直交直和を表す。これより、非退化曲面  $M$  のガウスの公式が

$$d_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi \quad (X, Y \in \Gamma(TM))$$

として与えられる。ここで、 $\nabla$  は  $M$  の誘導計量  $g$  に関するレビ・チビタ接続に一致し、 $h$  は  $M$  上の  $(0, 2)$  型対称テンソル場である。この  $h$  を  $M$  の第二基本形式と呼ぶ。更に、アファイン微分幾何 [8] の観点から、非退化はめ込み  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{0,2,1}$  は、 $M$  上の横断的ベクトル場  $\xi = (0, 0, 1)$  により、等積アファインはめ込みになることが分かる。

任意の  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  に対し、 $d$  は平坦接続であることより、

$$0 = {}^dR(X, Y)Z = \nabla R(X, Y)Z + \{(\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z)\}\xi$$

となる。ここで、 $(\nabla_X h)(Y, Z) = X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$  である。従って、

$$\nabla R = 0, \tag{1}$$

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) \tag{2}$$

を得る。式 (1) より、非退化曲面はすべて平坦であることを意味し、式 (2) を非退化曲面のガウス・コダッチの方程式と呼ぶ。このとき、次が示される。

**定理 1** (非退化曲面の基本定理).  $U \subset \mathbb{R}^2$  を単連結領域とし、 $(u, v)$  を  $U$  上の座標とする。また、 $h_{11}, h_{12}, h_{22}$  を  $U$  上の  $C^\infty$  級関数とする。このとき、誘導計量、第二基本形式をそれぞれ

$$du^2 + dv^2, \quad h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$$

とするような非退化はめ込み  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{0,2,1}$  がアファイン等長変換の差を除いて、一意的存在するための必要十分条件は、非退化曲面のガウス・コダッチの方程式を満たすことである。

さて、ここで非退化曲面  $M$  のいくつかのクラスを定義する。 $M$  が  $d$ -全測地的であるとは、 $h = 0$  を満たすことをいう。 $M$  が  $d$ -全臍的であるとは、ある  $M$  上の関数  $\lambda$  が存在して、 $h = \lambda g$  を満たすことをいう。 $M$  が  $d$ -極小曲面であるとは、

$$\mathcal{H} := \frac{1}{2} \text{trace}_g h = 0$$

を満たすことをいい、 $\mathcal{H}$  を  $M$  の平均曲率という。

**命題 2.** 次が成立する.

- (1)  $d$ -全測地的曲面は,  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の平面として特徴づけられる.
- (2)  $d$ -全臍的曲面は,  $\lambda$  が定数関数であることが示され,  $\lambda = 0$  でなければ,  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の回転放物面として特徴づけられる.

**注意 3.** 主結果を述べる前に,  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の曲面論は別の文脈でも行われていることに注意する. すなわち,  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の非退化曲面は, simply-isotropic 空間  $\mathbb{I}^3$  内の admissible 曲面と等価な概念である. simply-isotropic 空間  $\mathbb{I}^3$  は, Caley-Klein 幾何の観点から現れる対象である. 例えば [11], [3], [10] を参照せよ. 一方, 今回は, 単に退化計量と線形接続のみ用いて, 曲面論の再定式化をしていることになる.

## 主結果

以下では,  $d$ -極小曲面について得られた結果と擬リーマン幾何学への応用を与える.

**命題 4.**  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^{0,2,1}$  を非退化はめ込み,  $\mathcal{H}$  を  $f$  の平均曲率,  $\Delta_g$  を  $f$  による誘導計量  $g$  に関するラプラシアンとする. このとき, 次が成立する.

$$\Delta_g f = 2\mathcal{H}\xi \in \Gamma(T^\perp M).$$

特に,  $f$  が  $d$ -極小であるための必要十分条件は,  $f$  が調和であることである.

**系 5.**  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内にコンパクトな  $d$ -極小曲面は存在しない.

**定理 6** ( $d$ -極小曲面の Weierstrass 型表現公式).  $U \subset \mathbb{C}$  を単連結領域とし,  $F$  を  $U$  上の正則関数,  $G$  を  $U$  上の有理型関数で,  $F$  は零点を持たないとする. このとき, 写像

$$f(u, v) = \operatorname{Re} \int_w (F, iF, 2FG) dw \quad (w := u + iv \in U)$$

は,  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の  $d$ -極小曲面を与え,  $(u, v) \in U$  は等温座標系になる. 更に, 次の関係が成立する.

$$(f_u, f_u) = (f_v, f_v) = |F|^2, \quad (f_u, f_v) = 0.$$

逆に,  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の  $d$ -極小曲面は, 局所的に上のような表示を持つ.

組  $(F, G)$  を **Weierstrass data** と呼ぶ. ここで,  $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  とし,  $(e^{-i\theta}F, e^{-i\theta}G)$  を Weierstrass data とする  $d$ -極小曲面を考えてみると, 写像の  $S^1$  族が得られ,  $f_\theta$  で表すことにすれば, これを随伴族といい,  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の等長変形を与えている.

一方,  $F$  が零点を持つ場合を考えると, 定理 6 より誘導計量が退化し, 曲面上に特異点が見れる. 特に,  $d$ -極小曲面は, 孤立特異点を許容することが分かる. 交叉帽子 (図 1) や  $D_4^-$  型特異点 (図 3) が確認できたが, 現れる特異点の分類は未完である (図 2, 4 など). 次に, いくつかの Weierstrass 型表現公式のリストアップをしよう.

\*  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面  $f_{\mathbb{R}^3}$  の場合, 局所的には, 次のように表せる.

$$f_{\mathbb{R}^3} = \operatorname{Re} \int_w (F(1 - G^2), iF(1 + G^2), 2FG) dw.$$

\*  $\mathbb{R}_1^3$  の極大曲面  $f_{\mathbb{R}_1^3}$  の場合, 局所的には, 次のように表せる.

$$f_{\mathbb{R}_1^3} = \operatorname{Re} \int_w (F(1 + G^2), iF(1 - G^2), 2FG) dw.$$

従って、極小曲面  $f_{\mathbb{R}^3}$ , 極大曲面  $f_{\mathbb{R}_1^3}$ ,  $d$ -極小曲面  $f_{\mathbb{R}^{0,2,1}}$  の間に、

$$f_{\mathbb{R}^{0,2,1}} = \frac{1}{2} (f_{\mathbb{R}^3} + f_{\mathbb{R}_1^3})$$

という関係がある。  $d$ -極小曲面から極小曲面, 極大曲面の分離ができるだろうか。これは未解決問題である。

さて、4次元ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}_1^4$  内の誘導計量が退化する3次元部分空間は、ベクトル空間として  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  と等長同型であることに注意する。  $d$ -極小曲面に対する4次元ミンコフスキー空間内の曲面論への応用として、次を得た。

**定理 7.**  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_1^4$  を全測地的でない連結な空間的平坦平均曲率零曲面を与えるはめ込みとする。  $h$  を  $M$  上の第二基本形式とし、集合  $E$  を次で定める。

$$E := \{x \in M \mid h_x = 0\}.$$

このとき、次が成立する。

- (1)  $M \setminus E$  は、  $M$  の開かつ稠密な部分集合であり、更に、連結である。
- (2)  $M$  は、平坦な法束を持つ。すなわち、法曲率  $R^\perp \equiv 0$  が成立する。
- (3)  $M$  は、  $\mathbb{R}_1^4$  の等長変換によって  $\mathbb{R}^{0,2,1} \subset \mathbb{R}_1^4$  にはめ込まれ、  $d$ -極小曲面である。

ここで、  $E \neq \emptyset$  となる空間的平坦平均曲率零曲面は存在する。

**系 8.**  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の  $d$ -極小曲面の  $\text{Aut}(\mathbb{R}^{0,2,1}, d)$  の部分群  $K$  による同値類の全体の集合と、  $\mathbb{R}_1^4$  内の空間的平坦平均曲率零曲面の等長類の全体の集合の間に一対一対応が存在する。ここで、

$$K := \left\{ \left( \begin{array}{cc|c} T & 0 & \\ \hline & 0 & \\ 0 & 0 & c \end{array} \right) \mid c = \pm 1, T \in O(2) \right\} \times \mathbb{R}^3$$

である。

完備な非退化曲面であるときは、次が成立する。

**定理 9.**  $(M, g)$  を連結な2次元完備リーマン多様体、  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{0,2,1}$  を等長はめ込みとする。このとき、  $(M, g)$  は、標準的な2次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  に等長同型であり、  $f$  の像は、大域的グラフ

$$\{(u, v, \varphi(u, v)) \in \mathbb{R}^{0,2,1} \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

と一致する。ここで、  $\varphi$  は、  $\mathbb{R}^2$  上のある  $C^\infty$  級関数である。逆に、このような  $uv$ -平面上の大域的グラフは、完備である。

系8と定理9により、次のことが分かる。

$$\#\{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^4 \mid f : \text{等長的平均曲率零はめ込み}\} / \text{Isom}(\mathbb{R}_1^4) = \infty.$$

ここで、  $\text{Isom}(\mathbb{R}_1^4)$  は  $\mathbb{R}_1^4$  の等長変換群である。特に、複素定数の差を除いて、整関数の分だけ合同類が存在する。すなわち、非可算無限個ある。

この事実は、本質的に Ma-Wang-Wang [7] によって得られている。また、次のことが分かる。

$$\#\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^4 \mid f: \text{等長的平均曲率零はめ込み}\} / \text{Isom}(\mathbb{R}_1^4) = 1,$$

$$\#\{f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^4 \mid f: \text{等長的平均曲率零はめ込み}\} / \text{Isom}(\mathbb{R}_1^4) = 1.$$

いずれの場合も  $f$  は全測地的になり、それぞれ  $\mathbb{R}_1^4$  内の直線  $\{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$ 、部分空間  $\{x_1 = 0\}$  に対応している。

最後に各種曲面の比較の表を与える。但し、曲面の連結性は仮定したものとする。

	コンパクト性	大域的グラフ	特異点	完備性	断面曲率
$\mathbb{R}^3$ の極小曲面	$\nexists$	平面のみ	$\nexists$	$\exists$	$\leq 0$
$\mathbb{R}_1^3$ の極大曲面	$\nexists$	平面のみ	$\exists$ ([6])	平面のみ	$\geq 0$
$\mathbb{R}^{0,2,1}$ の $d$ -極小曲面	$\nexists$	$\exists$	$\exists$	$\exists$	$\equiv 0$

ここで、 $\nexists$  は、コンパクトな例や特異点が現れないということの意味し、 $\exists$  は、平面以外の例や特異点が現れることを意味する。

- $d$ -極小曲面を与える  $C^\infty$  級写像  $f$  のヤコビ行列の階数が 1 となる孤立特異点の例。

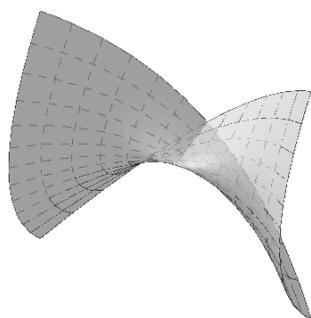


図 1:  $(F, G) = (w, 1/w)$ .

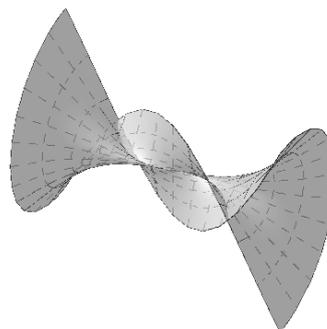


図 2:  $(F, G) = (w^2, 1/w^2)$ .

- $d$ -極小曲面を与える  $C^\infty$  級写像  $f$  のヤコビ行列の階数が 0 となる孤立特異点の例。

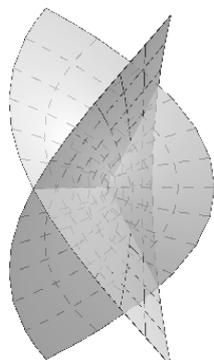


図 3:  $(F, G) = (w, 1/w^2)$ .

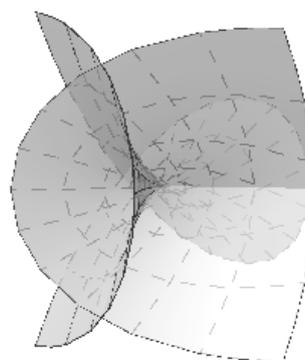


図 4:  $(F, G) = (w^2, 1/w)$ .

## 参考文献

- [1] L. J. Alías and B. Palmer, *Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorentzian space forms*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124** (1998), 315–327.
- [2] H. Ancaux, *Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry*, World Scientific (2011).
- [3] M. E. Aydin, *Classification results on surfaces in the isotropic 3-space*, AKU J. Sci. Eng. **16** (2016), 239–246.
- [4] A. Bejancu and K. L. Duggal, *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer Academic Publishers (1996).
- [5] B. Y. Chen, *Black holes, marginally trapped surfaces and quasi-minimal surfaces*, Tamkang J. Math. **40** (2009), 313–341.
- [6] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [7] X. Ma, C. P. Wang and P. Wang, *Global geometry and topology of spacelike stationary surfaces in the 4-dimensional Lorentz space*, Adv. Math. **249** (2013), 311–347.
- [8] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine differential geometry*, Cambridge University Press (1994).
- [9] M. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London (1983).
- [10] H. Pottmann, P. Grohs and N. J. Mitra, *Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity*, Adv. Comput. Math. **31** (2009), 391–419.
- [11] H. Sachs, *Isotrope geometrie des raumes*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1990).
- [12] K. Saji, *Criteria for  $D_4$  singularities of wave fronts*, Tohoku Math. J. **63** no. 1 (2011), 137–147.
- [13] Y. Sato, *On the classification of ruled minimal surfaces in pseudo-Euclidean space*, Math. J. Okayama Univ. **61** (2019), 173–186.
- [14] O. C. Stoica, *On singular semi-Riemannian manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **11** no. 5 (2014), 1450041.
- [15] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.