古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合*

田中 真紀子

東京理科大学理工学部

1 序章

本講演は田崎博之氏との共同研究に基づいている。

コンパクト対称空間 M の部分集合 A は、A の任意の点 x における点対称 s_x が A の各点を固定するときに対蹠集合とよばれる。s_x は x を孤立不動点として持つので、対蹠集合は離散的であり、したがって有限集合である。対蹠集合の定義は Chen–Nagano[1] で与えられた。彼らはコンパクト Lie 群の 2-rank（可換部分群 $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ の階数の最大値）の拡張と言える 2-number（対蹠集合の位数の最大値）について詳細に研究し、ほぼすべてのコンパクト対称空間の 2-number を決定している。一般には、包含関係について極大な対蹠集合であってもその位数が 2-number に等しいとは限らないので、M の極大対蹠集合を等長変換群の作用を除いて決定することは、対蹠集合に関する基本的問題であり、その結果は M の対称空間構造と深い関係があると考えられる。著者は田崎博之氏と共同でコンパクト対称空間 M の極大対蹠集合の M の等長変換群の単位連結成分による合同類の分類に取り組んでいる。我々は [8] で古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の共役類の分類を与えた。現在は、この結果を利用して、古典型コンパクト対称空間およびその商空間の極大対蹠集合の分類を進めており、講演では $DIII(n) = SO(2n)/U(n)$ と $DIII(n)/\mathbb{Z}_2$ (n は偶数) の極大対蹠集合の分類について述べた。

2 コンパクト対称空間の対蹠集合

M をコンパクト Riemann 対称空間（以下では単にコンパクト対称空間とよぶ）とする。$x \in M$ における点対称を s_x で表すと、s_x は M の対合的等長変換で、x は s_x の孤立不動点である。$A \subset M$ が、任意の $x, y \in A$ に対して $s_x(y) = y$ を満たすとき、A は**対蹠集合 (an antipodal set)** とよばれる。対蹠集合は有限集合である。M が連結のときには、対蹠集合の任意の異なる 2 点はある閉測地線上で

*研究集会「部分多様体論・湯沢 2018」2018 年 11 月 29 日–12 月 1 日（湯沢グランドホテル）

対蹠的である。包含関係について極大な対蹠集合を極大対蹠集合とよぶ。例えば、$\mathbb{R}^{n+1}$ の単位超球面 S^n の任意の点 x に対して $\{x, -x\}$ は極大対蹠集合である。また、$\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $u_1, \ldots, u_{n+1}$ に対して $\{\langle u_1\rangle_{\mathbb{R}}, \ldots, \langle u_{n+1}\rangle_{\mathbb{R}}\}$ は n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の極大対蹠集合である。連結コンパクト対称空間 M の等長変換 f に対して $f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$ が任意の $x \in M$ に対して成り立つので、A が M の対蹠集合ならば $f(A)$ も M の対蹠集合である。M の 2 つの部分集合は、M の等長変換群 $I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ の元で写り合うとき、$I_0(M)$ **合同**（あるいは、単に**合同**）であるという。一般には M の極大対蹠集合は合同を除いて唯一つとは限らないが、M が対称 R 空間の場合には合同を除いて唯一つである ([5])。N をコンパクト対称空間 M の全測地的部分多様体とすると、任意の $x \in N$ に対して s_x は N を保ち、s_x の N への制限は N の点対称になり N は対称空間である。このとき、A が N の対蹠集合ならば A は M の対蹠集合でもある。また、M の対蹠集合 A' に対して $A' \cap N$ は N の対蹠集合である。M, M' がコンパクト対称空間で局所等長的被覆写像 $\pi : M \to M'$ が存在するとき、A が M の対蹠集合ならば $\pi(A)$ は M' の対蹠集合である。逆は一般には成立しない。

コンパクト型 Hermite 対称空間の 2 つの実形が離散的に交わるならば、その交叉は対蹠集合であり、特に、2 つの実形が合同ならば交叉は極大対蹠集合になることは対蹠集合に関する興味深い事実である ([4, 6, 7])。Iriyeh–Sakai–Tasaki [3] はこの結果を利用してコンパクト型 Hermite 対称空間のラグランジアン Fleor ホモロジーを決定した。

3 古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の分類

G をコンパクト Lie 群とし e を G の単位元とする。G には両側不変 Riemann 計量が存在し Riemann 対称空間になる。$x \in G$ における点対称 s_x は $s_x(y) = xy^{-1}x$ $(y \in G)$ である。A を G の対蹠集合とする。左移動と右移動は G の等長変換であり、$e \in A$ と仮定しても一般性を失わない。このとき、任意の $x \in A$ に対して $s_e(x) = x^{-1} = x$、すなわち、$x^2 = e$ が成り立つ。さらに、$x, y \in A$ に対して $s_x(y) = y$ が成立するための必要十分条件は x と y が可換なことである。A が極大対蹠集合ならば A は部分群であり、よって、A は $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型な可換部分群である。したがって、コンパクト Lie 群 G の極大対蹠集合の $I_0(G)$ 合同類の分類は、極大対蹠部分群の共役類の分類に帰着され、さらにそれは、$\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型な可換部分群の共役類の分類に帰着される。これについては関連する先行研究 [2, 9] があるが、これらとは独立に我々は [8] で G が $U(n), SU(n), Sp(n), O(n), SO(2n)$ の商群の場合に、G の極大対蹠部分群の共役類の分類を、行列を用いた代表元の具体的表示を与えることにより行った。

正方行列からなる集合 X に対して $X^{\pm} := \{x \in X \mid \det x = \pm 1\}$ と定める。

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

とおくと、Δ_n は $U(n), O(n), Sp(n)$ の共役を除いてただ一つの極大対蹠部分群であり、Δ_n^+ は $SU(n), SO(n)$ の共役を除いてただ一つの極大対蹠部分群である。

$$D[4] := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2)$$

は正方形を不変にする二面体群である。自然数 n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の k 乗と奇数 l の積に分解し、$0 \leq s \leq k$ を満たす自然数 s に対して

$$D(s,n) := \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

とおく。1_m で m 次単位行列を表す。

定理 3.1 ([8]) n を偶数とし、n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の k 乗と奇数 l の積に分解する。$\pi_n : SO(n) \to SO(n)^* := SO(n)/\{\pm 1_n\}$ を自然な射影とする。$SO(n)^*$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) $k = 1$ の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+), \quad \pi_n(D^+[4] \otimes \Delta_l)$$

ただし、$n = 2$ のとき $\pi_2(\Delta_2^+)$ は除外する。

(2) $k \geq 2$ の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+), \quad \pi_n(D(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k)$$

ここで、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外し、さらに、$n = 4$ のとき $\pi_4(\Delta_4^+)$ も除外する。

注意 3.2 $\Delta_2^+ \subsetneq D^+[4]$ より $\pi_2(\Delta_2^+)$ は除外される。$\Delta_2 \subsetneq D[4]$ より $D(k-1, 2^k) \subsetneq D(k, 2^k)$ となるので $(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外される。また、$\Delta_4^+ = \Delta_2 \otimes \Delta_2 \subsetneq D[4] \otimes D[4] = D(2,4)$ より $\pi_4(\Delta_4^+)$ は除外される。

4 $DIII(n) = SO(2n)/U(n)$ とその商空間の極大対蹠集合の分類

$C(1_{2n}, -1_{2n}) := \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$ とおく。$C(1_{2n}, -1_{2n})$ の各元は交代行列になることに注意しておく。$J_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ とし、

$$\begin{bmatrix} \pm J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} \in SO(2n)$$

を $\mathrm{diag}(\pm J_1, \ldots, J_1)$ で表すと、

$$\begin{aligned} &C(1_{2n}, -1_{2n}) \\ &= \left\{g\,\mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)\,g^{-1} \mid g \in SO(2n)\right\} \cup \left\{g\,\mathrm{diag}(-J_1, J_1, \ldots, J_1)\,g^{-1} \mid g \in SO(2n)\right\} \end{aligned}$$

と二つの連結成分の合併に分解される。これらは $\mathbb{R}^{2n}$ の二つの向きに応じた $\mathbb{R}^{2n}$ の直交複素構造全体の分解になっている。各連結成分は $SO(2n)$ の全測地的部分多様体である。

$$DIII(n) =: \left\{g\,\mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)\,g^{-1} \mid g \in SO(2n)\right\}$$

によって $DIII(n)$ を定めると、$SO(2n)$ は共役作用により $DIII(n)$ に推移的に作用し、$\mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1) \in DIII(n)$ におけるイソトロピー部分群は

$$\left\{g \in SO(2n) \mid g\,\mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)\,g^{-1} = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)\right\} \cong U(n)$$

であるから $DIII(n) \cong SO(2n)/U(n)$ となる。$DIII(n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間である。

$$\alpha(g) = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (g \in SO(2n))$$

によって $SO(2n)$ の自己同型写像 α を定めると、$C(1_{2n}, -1_{2n})$ の連結成分の合併への分解は

$$C(1_{2n}, -1_{2n}) = DIII(n) \cup \alpha(DIII(n))$$

となる。この連結成分への分解は Pfaffian の値によって識別できる。$2n$ 次交代行列 X の Pfaffian $\mathrm{Pf}(X)$ は次のように定義される[1]。S_{2n} で $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ の置換全

[1] m 次交代行列の行列式は m が奇数のときには 0 であり、m が偶数のときには Pfaffian の値の二乗である。

体を表す。

$$F_{2n} = \{\sigma \in S_{2n} \mid \sigma(2i-1) < \sigma(2i)\ (1 \leq i \leq n), \sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n-1)\}$$

によって S_{2n} の部分集合 F_{2n} を定める。$2n$ 次交代行列 $X = [a_{ij}]$ に対して

$$\mathrm{Pf}(X) := \sum_{\sigma \in F_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

である。Pfaffian の定義より

$$\mathrm{Pf}(\mathrm{diag}(\epsilon_1 J_1, \ldots, \epsilon_n J_1)) = \epsilon_1 \cdots \epsilon_n$$

となるので、$\mathrm{Pf}(DIII(n)) = 1$, $\mathrm{Pf}(\alpha(DIII(n))) = -1$ となる。$DIII(n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間なので [5] Theorem 3.1 より大対蹠集合が合同を除いて一意に定まる。

$$\Gamma_n := \{\mathrm{diag}(\epsilon_1 J_1, \ldots, \epsilon_n J_1) \mid \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1\}$$

とおくと、$\Gamma_n \subset DIII(n)$ であり、

$$\mathrm{diag}(-J_1, \ldots, -J_1)\, \Gamma_n = \Delta_n^+ \otimes 1_2$$

が $SO(2n)$ の対蹠集合であることから、Γ_n は $DIII(n)$ の対蹠集合である。$|\Gamma_n| = 2^{n-1}$ であり、[1] により $DIII(n)$ の 2-number は 2^{n-1} であることから Γ_n は $DIII(n)$ の極大対蹠集合であることがわかる。

次に、$DIII(n)$ の商空間について考える。$\pi_{2n} : SO(2n) \to SO(2n)^*$ を自然な射影とする。n が奇数のときには、$SO(2n)$ を $\{\pm 1_{2n}\}$ で割るとき $DIII(n)$ と $\alpha(DIII(n))$ は写り合い

$$\frac{SO(2n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \supset \frac{C(1_{2n}, -1_{2n})}{\{\pm 1_{2n}\}} \cong DIII(n)$$

が成り立つ。特にこの場合には $DIII(n)$ の被覆は現れない。n が偶数の場合には、$SO(2n)$ を $\{\pm 1_{2n}\}$ で割るとき

$$\frac{SO(2n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \supset \frac{C(1_{2n}, -1_{2n})}{\{\pm 1_{2n}\}} = \frac{DIII(n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \cup \frac{\alpha(DIII(n))}{\{\pm 1_{2n}\}}$$

が成り立つ。$DIII(n)^* := DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$ は $SO(2n)^*$ の単位元 $e = \pi_{2n}(1_{2n})$ に関する極地、すなわち、$\{g \in SO(2n)^* \mid s_e(g) = g\}$ の一つの連結成分である。

一般に、コンパクト Lie 群の単位元に関する極地 M の極大対蹠集合の分類については、次の基本方針に基づいて考えればよい。G を両側不変計量をもつコンパクト Lie 群とし、G_0 を G の単位連結成分とする。M を G の e に関する極地、すなわち、$F(s_e, G)$ の連結成分の一つとする。$g \in G$ に対して I_g で g による共役が

定める G の内部自己同型写像を表すと、I_g は G の等長変換である。$x \in M$ とすると $M = \{I_g(x) \mid g \in G_0\}$ が成り立つ。M の等長変換全体の成す Lie 群 $I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ は $I_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G_0\}$ と表せる。M の極大対蹠集合 A をとる。$A \subset M \subset F(s_e, G)$ より $A \cup \{e\}$ は G の対蹠集合であり、$A \cup \{e\}$ を含む G の極大対蹠部分群 $\tilde{A}$ が存在する。A の極大性から $A = M \cap \tilde{A}$ が成り立つ。$B_0, \dots, B_k$ を G の極大対蹠部分群の G_0 共役類の代表とすると、ある $0 \leq s \leq k$ と $g \in G_0$ が存在して $\tilde{A} = I_g(B_s)$ が成り立つ。したがって、

$$A = M \cap \tilde{A} = M \cap I_g(B_s) = I_g(M \cap B_s)$$

となり、A は M 内で $M \cap B_s$ と $I_0(M)$ 合同になる。以上から M の極大対蹠集合の $I_0(M)$ による合同類の代表の候補は

$$M \cap B_0, \dots, M \cap B_k$$

である。

上記の基本方針を $DIII(n)^*$ に適用する。$2n = 2^k \cdot l$ と $2n$ を 2 の k 乗と奇数 l の積に分解すると $k \geq 2$ であるから、定理 3.1 より

$$\pi_{2n}(\Delta_{2n}^+) \cap DIII(n)^*, \quad \pi_{2n}(D(s, 2n)) \cap DIII(n)^* \quad (1 \leq s \leq k)$$

を明らかにすればよい。$\pi_{2n}(g) \in DIII(n)^*$ を満たす $g \in SO(2n)$ は $g^2 = -1_{2n}$ であることから $\pi_{2n}(\Delta_{2n}^+) \cap DIII(n)^* = \emptyset$ がわかる。$1 \leq s \leq k$ のとき

$$\begin{aligned}
&\pi_{2n}(D(s, 2n)) \cap DIII(n)^* \\
&= \pi_{2n}(D(s, 2n) \cap DIII(n)) \\
&= \pi_{2n}(\{d \in D(s, 2n) \mid d \text{ は } 1_n \otimes J_1 \text{ に } SO(2n) \text{ 共役 }\}) \\
&= \pi_{2n}(\{d \in D(s, 2n) \mid d^2 = -1_{2n},\ \mathrm{Pf}(d) = 1\})
\end{aligned}$$

となる。上式の最後の集合を詳細に調べることにより次の結果を得る。$I_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $K_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする。

定理 4.1 n を偶数とする。$2n = 2^k \cdot l$ と $2n$ を 2 の k 乗と奇数 l の積に分解する。このとき、$DIII(n)^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $SO(2n)^*$ 合同になる。

(1) $n = 2$ の場合、

$$\{\pi_4(J_1 \otimes I_1), \pi_4(J_1 \otimes K_1), \pi_4(1_2 \otimes J_1)\}$$

(2) $n = 4$ の場合、

$$\begin{aligned}
&\{\pi_8(J_1 \otimes J_1 \otimes J_1)\} \cup \\
&\{\pi_8(J_1 \otimes d_1 \otimes d_2), \pi_8(d_1 \otimes J_1 \otimes d_2), \pi_8(d_1 \otimes d_2 \otimes J_1) \mid d_1, d_2 \in \{1_2, I_1, K_1\}\}
\end{aligned}$$

(3) $n = 4m + 2\,(m \geq 1)$ の場合、

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^-\},$$
$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d_1 \otimes d_0) \mid d_1 \in \{I_1, K_1\}, d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$$
$$\cup\, \{\pi_{2n}(1_2 \otimes J_1 \otimes d_0) \mid d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$$

(4) $n = 4m\,(m \geq 2)$ の場合、

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^+\},$$
$$\{\pi_{2n}(d) \mid d \in D(s, 2n), d^2 = -1_{2n}\} \quad (2 \leq s \leq k+1)$$

ただし、$(s, 2n) = (k, 2^{k+1})$ の場合は除外される。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 273–297.

[2] R. L. Griess Jr, Elementary abelian p-subgroups of algebraic groups, Geom. Dedicata, **39** (1991), 253–305.

[3] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), 1135–1151.

[4] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. of Japan, **64** (2012), 1297–1332.

[5] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math., **50** (2013), 161–169.

[6] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 275–291.

[7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: “The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type”, J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 1161–1168.

[8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, J. Lie Theory, **27** (2017), 801–829.

[9] J. Yu, Elementary abelian 2-subgroups of compact Lie groups, Geom. Dedicata, **167** (2013), 245–293.