

時空の極大曲面と Euclid 空間の極小曲面の流体力学的双対性とその応用

梅原雅顕 (東工大・情報理工学院)

1. 極大曲面と EUCLID 空間の極小曲面の流体力学的双対性

これは「部分多様体論・湯沢 2018」における講演内容の要約です. 関連する話題として, 湯沢研究集会で 2016 年に「3次元時空の極大曲面と小林曲面」という話をしております. ですので, この原稿では, 最近, 筆者が赤嶺新太郎氏 (名大) と山田光太郎氏 (東工大) との共同研究として得た新たな知見に絞って解説します.

1.1. 2次元流体の基本事項. 2次元流体とは, xy -平面 \mathbf{R}^2 上の領域 D 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{v} = (u, v)$ と 2つのスカラー場 $\rho, p: D \rightarrow \mathbf{R}$ の三つ組みのことで \mathbf{v} は流体の速度, ρ は密度, p は圧力を表す. これについて以下を仮定する.

- ベクトル場 \mathbf{v} の積分曲線を, 「流体の流れ」とよぶ. 流れは定常 (steady) つまり時間に依存しない.
- 流れは順圧 (barotropic) つまり圧力 p は密度の単調増加関数である. 地上の空気は p は $\rho^{1.4}$ に比例することが知られている.
- $c := \sqrt{dp/d\rho}$ は (局所) 音速とよばれる.
- Euler の運動方程式 $dp + \rho dq/2 = 0$ が成り立つ, ただし $q := u^2 + v^2$.
- 連続の方程式 $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ が成り立つ.
- 流れは渦なし (irrotational), つまり $\text{rot}(\mathbf{v}) = v_x - u_y = 0$ を満たす. ただし

$$v_x := \partial v / \partial x, \quad u_y := \partial u / \partial y$$

とする.

流れが「渦なし」であることから関数 $\Phi: D \rightarrow \mathbf{R}$ が存在し $\nabla\Phi = \mathbf{v}$ を満たす, これをポテンシャルとよぶ, ただし $\nabla\Phi := (\Phi_x, \Phi_y)$ である. 流れは順圧であることを仮定しているため, 圧力 p は密度 ρ の関数である. 音速の定義式 $c^2 = p'(\rho)$ と運動方程式より

$$(1.1) \quad \rho_x = \frac{p_x}{c^2} = -\frac{\rho(uu_x + vv_x)}{c^2}, \quad \rho_y = \frac{p_y}{c^2} = -\frac{\rho(uu_y + vv_y)}{c^2}$$

を得るが, 連続の方程式に代入して

$$(1.2) \quad 0 = \frac{c^2((\rho u)_x + (\rho v)_y)}{\rho} = (c^2 - \Phi_x^2)\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + (c^2 - \Phi_y^2)\Phi_{yy}$$

を得る. これがポテンシャルの満たす微分方程式である.

一方, 連続の方程式に着目すると, 関数 $\Psi: D \rightarrow \mathbf{R}$ が存在し,

$$(1.3) \quad \Psi_x = -\rho v, \quad \Psi_y = \rho u$$

を満たす. これを流れの関数 (stream function) という. いま $\xi := \rho u$ および $\eta := \rho v$ とおくと, (1.1) は以下のように書き換えることができる.

$$(1.4) \quad (\rho^2 c^2 - \xi^2 - \eta^2)\rho_x = -\rho(\xi\xi_x + \eta\eta_x), \quad (\rho^2 c^2 - \xi^2 - \eta^2)\rho_y = -\rho(\xi\xi_y + \eta\eta_y).$$

渦なし条件より

$$0 = v_x - u_y = \frac{\eta_x}{\rho} - \frac{\xi_y}{\rho} - \frac{\eta\rho_x}{\rho^2} + \frac{\xi\rho_y}{\rho^2}$$

となるので,

$$(1.5) \quad 0 = \rho(\xi^2 + \eta^2 - \rho^2 c^2)(v_x - u_y) \\ = (\rho^2 c^2 - \Psi_y^2)\Psi_{xx} + 2\Psi_x\Psi_y\Psi_{xy} + (\rho^2 c^2 - \Psi_x^2)\Psi_{yy}$$

となる, これが流れの関数の満たす微分方程式である.

1.2. Chaplygin 流体と極小曲面・極大曲面. 上述の2次元流体が

$$(1.6) \quad \rho c = 1$$

を満たすとき **Chaplygin 流体** (Chaplygin gas flow) という. いま $\Psi: D \rightarrow \mathbf{R}$ を Chaplygin 流体の流れの関数とすると

$$(1.7) \quad B_\Psi := 1 - \Psi_x^2 - \Psi_y^2$$

は符号を変える可能性があることに注意する. このとき流れの関数の満たす微分方程式 (1.5) は

$$(1.8) \quad (1 - \Psi_y^2)\Psi_{xx} + 2\Psi_x\Psi_y\Psi_{xy} + (1 - \Psi_x^2)\Psi_{yy} = 0$$

を満たす. この原稿では, 平均曲率が零の曲面を ZMC 曲面 (zero mean curvature) と記す. すると (1.8) は, 関数 $t = \Psi(x, y)$ が表す3次元 Lorentz-Minkowski 時空 $(\mathbf{L}^3; x, y, t)$ 上の曲面

$$F(x, y) := (x, y, \Psi(x, y))$$

の平均曲率が零であることと同値である. そこで (1.8) を **ZMC-方程式**と呼ぶことにする. いま U を平面 \mathbf{R}^2 の領域とし, はめ込み $f: U \rightarrow \mathbf{L}^3$ を考える. このとき

定義 1.1. 定義域上の点 $p \in U$ が, 空間的 (時間的) であるとは, f による \mathbf{L}^3 のローレンツ計量の引き戻しが, 点 p で正定値 (不定値) となるときを云う. 空間的でも時間的でもない点を **光的** という.

すべての U 上の点が, 空間的 (時間的) のとき f は空間的である (時間的である) という. 同様に, U 上の点がすべて光的のとき, f は光的であるという.

もしも p が光的な点なら p の十分近くで f は局所的に関数のグラフ $t = \Psi(x, y)$ の形で表すことができる. この場合, (1.7) で定まる B_Ψ の点 $p = (x_0, y_0, \Psi(x_0, y_0))$ での値 $B_\Psi(x_0, y_0)$ が正, 負, 零であることが, 点 p が空間的, 時間的, 光的であることに対応する. つまり, 関数 B_Ψ は, 時空の曲面のグラフの型変化識別子になっている.

定義 1.2. 関数 $\Psi: D \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフが **ZMC-曲面**を定めるとは, この関数 Ψ が (1.8) を満たすときを云う. さらに, Ψ が空間的であるとき, Ψ は**極大曲面**を定めるということにする.

このように定義すると, 以下に示すように光的な曲面も ZMC-曲面の仲間となる. 空間的な (時間的な) はめ込みについては, 平均曲率が零のとき ZMC-曲面とよぶことにすると, 光的な点の近傍では \mathbf{L}^3 の曲面は常に曲面を時間方向を高さ関数とするグラフで表されるので, 結局すべての \mathbf{L}^3 のはめ込まれた曲面について, それが ZMC 曲面である, という概念を厳密に定義することができる.

命題 1.3. 関数 $\Psi: D \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフが光的曲面ならば, この関数は, ZMC-曲面を定める.

(証明) Ψ がのグラフが光的曲面ならば $\Psi_x^2 + \Psi_y^2 = 1$ なので

$$(1 - \Psi_y^2)\Psi_{xx} + 2\Psi_x\Psi_y\Psi_{xy} + (1 - \Psi_x^2)\Psi_{yy} = \Psi_x^2\Psi_{xx} + 2\Psi_x\Psi_y\Psi_{xy} + \Psi_y^2\Psi_{yy}$$

となる. さらに $\Psi_x^2 + \Psi_y^2 = 1$ を x, y で偏微分をして $\Psi_{xx}\Psi_x + \Psi_{xy}\Psi_y$ と $\Psi_{yy}\Psi_y + \Psi_{xy}\Psi_x$ は共に零であることがわかるが, この式を辺々加えて Ψ が (1.8) を満たすことがわかる. \square

いま Ψ を Chaplygin 流体と仮定すると, $\rho c = 1$ より $1/\rho^2 = c^2 = dp/d\rho$, となり $dp = d\rho/\rho^2$ を得る. この式を運動方程式に代入すると $d(|\mathbf{v}|^2 - 1/\rho^2) = 0$ を得る. 特に定数 μ が存在して以下を満たす.

$$(1.9) \quad |\mathbf{v}|^2 + \mu = \frac{1}{\rho^2} (= c^2).$$

式 (1.3) より

$$(1.10) \quad B_\Psi = \mu\rho^2$$

が成り立つ. 特に, Ψ が極大曲面を定めている場合には $\mu > 0$ となる. この場合 Ψ を

$$\Psi(\tilde{\mu}x, \tilde{\mu}y)/\tilde{\mu} \quad (\tilde{\mu} := \frac{1}{\sqrt{|\mu|}})$$

に置き換えることで $\mu = 1$ に正規化することができる。そこで $\mu = 1$ の場合を考えると

$$(1.11) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{v}|^2 + 1}} = \sqrt{1 - \Psi_x^2 - \Psi_y^2}$$

となる。(1.2) より $c^2 = 1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2$ なので、ポテンシャルの方程式を

$$(1.12) \quad (1 + \Phi_y^2)\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + (1 + \Phi_x^2)\Phi_{yy} = 0$$

に書き換えることができる。これは、 Φ のグラフが 3次元 Euclid 空間 \mathbf{E}^3 の極小曲面を定めることを意味する。(一方 $\mu < 0$ のときは Ψ は時間的となり、 $\mu = -1$ に正規化すると、対応するポテンシャル Φ は、3次元時空 \mathbf{L}^3 の時間的 ZMC 曲面を定めるが、ここではこの事実は使わない。 $\mu = 0$ の場合もこめて詳しくは [3] をみよ。) この状況を少しくわしく考察すると、以下の事実が成立していることがわかる。

事実 1.4. $\Phi: D \rightarrow \mathbf{R}$ を C^∞ -関数で、極小曲面の方程式 (1.12) を満たしているとする、定数の差を除いて定まる C^∞ -関数 ψ で

$$\begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \begin{pmatrix} -\varphi_y \\ \varphi_x \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在し、ZMC 曲面の方程式 (1.8) と $\psi_x^2 + \psi_y^2 < 1$ を満たす。逆に、 C^∞ -関数 $\Psi: D \rightarrow \mathbf{R}$ で (1.8) と $\psi_x^2 + \psi_y^2 < 1$ を満たすものをとると、定数の差を除いて定まる C^∞ -関数 Φ で

$$\begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \psi_x^2 - \psi_y^2}} \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在し、極小曲面の方程式 (1.12) を満たすものが存在する。これらの対応は、一方は他方の逆対応を与えている。

この対応は、示唆な形で文献 [4] に記されている。

2. 時空の零平均曲率曲面上の光的な点について

2.1. Calabi の Bernstein 型定理. Calabi も、上述の流体の双対性を認識していたようで、流体については言及していないが、事実 1.4 を用いて、以下の定理が成り立つことを指摘した。

事実 2.1 (Calabi [5]). 関数 $\Psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ のグラフが空間的極大曲面を定めていれば、 Ψ は 1 次式で表される。

実際、上の双対性より、もしもそのような Ψ があれば、 Ψ を流れの関数と思ったときのポテンシャル Φ は極小曲面の方程式を満たし、極小曲面の Bernstein の定理により Φ は 1 次式となる。すると Ψ も 1 次式となり、上記の事実が示される。Calabi [5] では、この指摘のあと、今度は解析的な手法を駆使して、同じ結論が 5 次元以下の時空 \mathbf{L}^{n+1} ($n \leq 4$) の空間的極大超曲面のグラフ $\Psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ についても成り立つことを示した。さらに Cheng と Yau [6] は、その結果が、すべての \mathbf{L}^{n+1} ($n \geq 2$) について成り立つことを示した。

再び、事実 2.1 に話を戻そう。この主張において、 Ψ が極大曲面ではなく、単に ZMC 曲面のグラフであった場合には、反例が存在する。実際、

$$(2.1) \quad \psi_0(x, y) := y + g(x)$$

なる形の xy -平面全体で定義された C^∞ -関数を見ると、これは ZMC-曲面のグラフとなる。一変数関数 $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ の微分 g' が消えない点が時間的な点に対応し、 $g'(x)$ の零点が光的な点に対応する。ただし、この関数 ψ_0 のグラフには空間的な点が存在しない。この例は空間的な点がないが、小林治 [16] は、空間的な点、光的な点、時間的な点をすべてを含む ZMC 曲面のグラフ (以下、混合型とよぶ) を与える関数として

$$\psi_1(x, y) := x \tanh(2y), \quad \psi_2(x, y) := \log(\cosh x / \cosh y)$$

の 2 つを発見した。 ψ_1 and ψ_2 の空間的な部分は、それぞれ

$$(\cosh 2y)^2 > 4x^2, \quad (\cosh x)^{-2} + (\cosh y)^{-2} > 1$$

である。この空間的部分は極大曲面なので、対応するポテンシャルは

$$\varphi_1 = -\sqrt{(\cosh 2y)^2/4 - x^2}, \quad \varphi_2 := -\arcsin(\sinh x \sinh y)$$

となる。前者 φ_1 は、極小曲面としてのカタノイドの半分で、後者 φ_2 は、Scherk の周期的な曲面となる。この2つの例の拡張として、筆者らは「小林曲面」とよばれる極大曲面の族を構成し、その中の部分族で、その解析的延長が \mathbf{R}^2 上で定義された混合型の ZMC 曲面のグラフを与えるものの存在を示した。これについては 2016 年の筆者の湯沢での講演の要約に詳細を記しているのので、ここでは説明を割愛する。(詳しくは、論文 [7] を参照せよ。)

2.2. 光的点について。Calabi の Bernstein 型の定理により、 \mathbf{R}^2 で定義された関数が ZMC 曲面を定めると、その曲面は光的な点をもたなければならないことがわかる。まず、光的な点について非退化性を定義する。

定義 2.2. $\Psi : D \rightarrow \mathbf{R}$ を xy -平面上の領域で定義された関数とし、 $p \in D$ は、関数 Ψ のグラフにおける光的な点とせよ。すると、点 p は関数 $B := 1 - \Psi_x^2 - \Psi_y^2$ の零点であるが、勾配ベクトル

$$\nabla B = (\Psi_x, \Psi_y)$$

が点 p で消えないとき、非退化であるという。

非退化な光的点の集合の像について述べるためにまず、光的な曲線を以下で定義する。

定義 2.3. 時空 \mathbf{R}_1^3 の正則曲線

$$\sigma(s) = (x(s), y(s), t(s)) \quad (a < s < b)$$

が光的 (null, light-like) とは、以下を満たすときを云う。

$$\left(\sigma'(s) \cdot \sigma'(s) \right) = x'(s)^2 + y'(s)^2 - t'(s)^2 \equiv 0.$$

さらに、 σ が非退化 (non-degenerate) とは $\sigma'(s)$ と $\sigma''(s)$ が、各 $s \in (a, b)$ について一次独立になるときを云う。

非退化な光的曲線の xy 平面への射影は、変曲点のない正則平面曲線となる。逆に $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ を変曲点のない平面曲線で s を弧長パラメータとすると $\sigma(s) := (x(s), y(s), s)$ は非退化な光的曲線となる。この意味で、非退化な光的曲線は、ほぼ完全に理解できたといつてよいだろう。

ZMC 曲面上の非退化な光的な点については、その点の近傍の光的な点の集合の像は、 \mathbf{R}_1^3 の非退化で実解析的な光的曲線となり、それを $\sigma(t)$ で表示すると、元の ZMC 曲面を以下の形に表示できる

$$(2.2) \quad F(u, v) := \begin{cases} \frac{\sigma(u + i\sqrt{v}) + \sigma(u - i\sqrt{v})}{2} & (v \geq 0), \\ \frac{\sigma(u + \sqrt{|v|}) + \sigma(u - \sqrt{|v|})}{2} & (v < 0), \end{cases}$$

ここで $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。実解析性から $\sigma(u + i\sqrt{v})$ は v が十分に小さければ意味をもつ。逆に、非退化で実解析的な光的曲線 σ を任意に与えると、上の式で与えられる F は、ZMC 曲面で σ が光的点の像の助変数表示を与え、その光的点はすべて非退化となる (Gu [10] と [9, 14] を参照せよ)。

2.3. 退化した光的点について。非退化な光的点をもつ ZMC 曲面の例は沢山知られているが、退化した光的点をもつ例も知られている (cf. [1, 2, 8, 12])。さらに退化した光的点をもつ例を、Cauchy-Kovalevski による偏微分方程式の初期値問題の解として作る方法もある (cf. [17])。このような退化した光的点について Klyachin [15] は、以下のことを示した。

事実 2.4 (ZMC-曲面の直線定理). D を \mathbf{R}^2 の領域で $\Psi : D \rightarrow \mathbf{R}$ を C^∞ -級の関数で (1.8) を満たしているとする。もしも $p \in D$ が、退化した光的点を与えていたとすると $F(x, y) := (x, y, \Psi(x, y))$ の像は、 $F(p)$ を通る光的直線の開線分を含む。

この事実については、論文 [18] で任意のローレンツ多様体の平均曲率一定の超曲面にまで一般化されている。

3. 主結果と例

このたび、赤嶺氏、山田氏との共著論文 [3] で得られた主結果と具体例を紹介する。

定理 A. 全平面で定義された関数 $\Psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ が \mathbf{L}^3 内の空間的な点をもつ ZMC-曲面を定めており、それが平面でなかったとすると、 Ψ は非退化な光的点をもつ。

(証明の概略). Ψ は非退化な光的点をもたないとすると、事実 2.4 より、空間的点的集合は半平面か、2つの平行な直線に囲まれた領域となる。この領域を D とする。 Ψ を流体の流れの関数と思うと、対応するポテンシャル Φ は D 上の関数で、そのグラフは極小曲面で、空間上の半空間に含まれる。 Ψ の光的直線の近傍での挙動を調べることで、 Φ の定める極小曲面は、固有¹であることがわかる。すると、Hoffman-Meeks [13] の(極小曲面に関する)半空間定理により Φ のグラフは平面となり、 Ψ のグラフも平面であることがわかる。□

この定理の系として、以下の Bernstein 型の定理の改良が得られる。

系 B. 全平面で定義された関数 $\Psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ が \mathbf{L}^3 の ZMC-曲面を定めていたとし、それが空間的点的点と光的点だけからなるとすると、 Ψ は一次式で表される。

(証明の概略). Ψ のグラフが平面ではなかったとせよ。 Ψ が空間的な点を許容したとすると、定理 A より Ψ には、非退化な光的点が存在する。非退化な光的点は、定義により、その近傍に時間的点的点が存在するので、 Ψ が空間的点的点と光的点だけからなることに反する。よって \mathbf{R}^2 上のすべての点は光的でなければならない。このようなことが起きないことを示す。実際、その場合には Ψ の像は、 \mathbf{L}^3 を Euclid 空間だと思えば、平坦曲面な曲面となり、Hartman と Nirenberg の定理 ([11]) より、その像は柱面になることが示せる。それを利用すると Ψ の像は平面であることがわかる。□

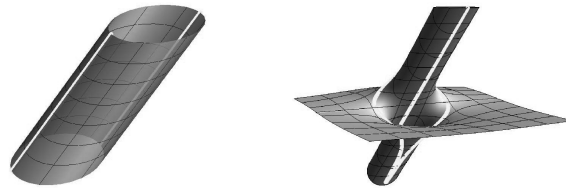


図 1. 赤嶺氏が構成した退化した光的点を持ち、自己交叉をもたない2つの曲面

ここで赤嶺氏による自己交叉を持たない2つの零平均曲率曲面の例を紹介する。

例 3.1 ([1, Figure 5]). 陰関数 $(x-t)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) で表される曲面は、零平均曲率で、固有埋め込みになっている。この曲面 (図 1 左) は2つの光的点からなる直線を含むが空間的部分は空である。

例 3.2 ([1, Figure 2]). a を正の数として、陰関数

$$a \sinh(at) \left((x-t)^2 + y^2 \right) + 2(x-t) \cosh(at) = 0$$

で表される曲面 (図 1 右) は、時空 \mathbf{L}^3 の零平均曲率をもつ固有埋め込みになっている。この例は白い2本の曲線が光的点的集合で、これ等とは別に一本の光的点からなる直線を含む。

最後に、現時点での筆者等の疑問を「問」として記しておく。

問 1. 固有に埋め込まれた ZMC-曲面で時間的点的点をもたなければ平面だろうか？

これは前系の一般化である。

問 2. 退化する光的点をもつような entire ZMC-graphs で、空間的部分をもつようなものがあるだろうか？

¹連続写像が固有 (proper) とは、任意のコンパクト集合の逆像がコンパクトになるときを云う。

全平面で定義された ZMC-曲面のグラフで空間的部分をもち退化する光的点をもつような固有に埋め込まれた ZMC-曲面で、空間的部分をもつようなものは存在する (図 1 右).

問 3. 混合型で全平面で定義された ZMC-曲面のグラフで、論文 [7] で与えた小林曲面以外のものが存在するだろうか？

実際、小林曲面以外の例は、今のところ見つかっていない。

参考文献

- [1] S. Akamine, *Causal characters of zero mean curvature surfaces of Riemann type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Kyushu J. Math., **71** (2017), 211-249.
- [2] S. Akamine and R.K. Singh, *Wick rotations of solutions to the minimal surface equation, the zero mean curvature equation and the Born-Infeld equation*, to appear in Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.
- [3] S. Akamine, M. Umehara and K. Yamada, *Improvement of the Bernstein-type theorem for space-like zero mean curvature graphs in Lorentz-Minkowski space using fluid mechanical duality*, preprint.
- [4] L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, John Wiley & Sons, 1958.
- [5] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations in Global Analysis*, (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, CA, 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 223-230.
- [6] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. Math. **104** (1976) 407-419.
- [7] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, *Entire zero mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Quarterly J. Math. **67** (2016), 801-837.
- [8] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, H. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in L^3 containing a light-like line*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. **350** (2012), 975-978.
- [9] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173-200.
- [10] C.H. Gu, *The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, Acta Math. Sinica (N.S.) **1** (1985), 173-180.
- [11] P. Hartman, and L. Nirenberg, *On spherical image whose Jacobians do not change sign*, Amer. J. Math. **81** (1959), 901-920.
- [12] K. Hashimoto and S. Kato, *Bicomplex extensions of zero mean curvature surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$ and $\mathbf{R}^{2,2}$* , preprint.
- [13] D. Hoffman and W. Meeks, *The strong half-space theorem for minimal surfaces*, Invent. Math. **101** (1990), 373-377.
- [14] Y. W. Kim, S.-E Koh, H. Shin and S.-D. Yang, *Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae*, J. Korean Math. Soc. **48** (2011), 1083-1100.
- [15] V. A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izv. Math. **67** (2003), 209-224.
- [16] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3* , Tokyo J. Math., **6** (1983), 297-309.
- [17] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski space with applications*, in "Lorentzian Geometry and Related Topics", Springer Proceedings of Mathematics & Statics **211**, 253-273, 2017.
- [18] M. Umehara and K. Yamada, *Hypersurfaces with light-like points in a Lorentzian manifold*, to appear in Journal of Geometric Analysis, (arXiv:1806.09233).