

# 極小曲面と極大曲面に対する境界値問題の双対性<sup>†</sup>

赤嶺 新太郎 (名古屋大学 大学院多元数理科学研究科)\*

## 1. 背景と問題

3次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内の極小曲面と3次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ 内の極大曲面は、ともに誘導計量がリーマン計量であり、平均曲率が恒等的に零となる曲面である。両者を記述する方程式の解の間にはCalabi [4]が指摘したように、双対性と呼べる一対一対応がある。一方で、Jenkins-Serrin [7]により、極小曲面方程式に対する無限境界値問題の解の存在と一意性定理が与えられ、今日ではそのような曲面を記述・解析する方法として単葉調和関数を用いる手法が知られるようになった(cf. [3], [5], [10], [13]).

本稿では、“**双対性のもとで極小曲面方程式の無限境界値問題に対応する極大曲面の境界値問題は何か?**”という問題を考え、極小曲面と極大曲面方程式に対するある種の境界値問題の同値性を紹介する。また双対対応する極小・極大曲面およびそれらの共役曲面の間に成り立つ対称性の関係について述べる。本稿の内容は、名古屋大学の藤野弘基氏との共同研究[1]に基づく。

## 2. 極小曲面と極大曲面の双対性

$xy$ -平面内の単連結領域 $\Omega$ 上の極小曲面方程式

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} \right) = 0,$$

の解 $\varphi$ を考える。 $\varphi$ のグラフは3次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ の極小曲面を与える。 $\varphi$ に対して、関数 $\psi$ を次の方程式で定義する。

$$d\psi = -\frac{\varphi_y}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} dx + \frac{\varphi_x}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} dy. \quad (2.1)$$

すると、 $\psi$ は次の3次元ミンコフスキー空間内の極大曲面方程式を満たす。

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla \psi}{\sqrt{1 - |\nabla \psi|^2}} \right) = 0, \quad |\nabla \psi| < 1.$$

このことから、極小・極大曲面方程式の解に対する次の一対一対応が成り立つ。

**事実 1** (Calabi [4]). 単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上では、(2.1)によって極小曲面方程式の解 $\varphi$ と極大曲面方程式の解 $\psi$ は定数差を除いて一対一に対応する。

本稿では、この(2.1)によって定まる $\psi$ を $\varphi$ の**双対 (dual)**と呼ぶ。Calabi [4]は事実1を用いて、極大曲面に対するBernstein型定理を示した。また、[2], [12]では双対性の流体力学的な側面とそれを用いた計量の退化点を許容した形でのBernstein型定理の拡張が述べられている。

## 3. 単葉調和関数を用いた極小曲面、極大曲面の表現

単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の極小曲面方程式の解 $\varphi$ による極小グラフ $\operatorname{graph}(\varphi)$ を考える。 $\operatorname{graph}(\varphi)$ が平面でなければ領域の一意化定理により、大域的な複素座標系 $(\mathbb{D}; w = u + iv)$ とパラメータ表示

<sup>†</sup> 研究会「部分多様体論・湯沢 2019」講演報告集。

本研究の一部は、JSPS 科研費 19K14527 および JSPS 二国間交流事業・日本-オーストリア共同研究「幾何学的視点からの形状形成」(JSPS/FWF Bilateral Joint Project I3809-N32 “Geometric Shape Generation”)の助成を受けたものである。

\* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
e-mail: s-akamine@math.nagoya-u.ac.jp

$X_{\min}(w) = (x(w), y(w), t(w))$  ( $w \in \mathbb{D}$ ) が得られる. 座標関数  $x, y, t$  は調和なので, とくに単葉調和関数  $f = x + iy$  は単位円板  $\mathbb{D}$  から領域  $\Omega$  への微分同相写像を与えており,  $X_{\min} = (f, \varphi \circ f)$  が  $\text{graph}(\varphi)$  の複素座標表示となる.

さらに,  $w$  を  $\bar{w}$  へと置き換えることで  $f$  は常に向きを保つとしてよい.  $\mathbb{D}$  上の正則関数  $h$  と  $g$  を用いた調和関数の標準分解  $f = h + \bar{g}$  を用いると  $X_{\min}$  の共形性から次が従う.

$$0 = (\partial x / \partial w)^2 + (\partial y / \partial w)^2 + (\partial t / \partial w)^2 = h'g' + t_w^2.$$

したがって,  $\sqrt{h'g'}$  の一価正則な分枝が存在し, 第三座標  $t = \varphi \circ f$  は  $t(w) = \text{Re}F(w)$  と書ける. ここで,  $F = F_f$  は次で定義される正則関数である.

$$F(w) = 2i \int_0^w \sqrt{h'(\zeta)g'(\zeta)} d\zeta + \varphi \circ f(0). \quad (3.1)$$

まとめると, 極小グラフ  $\text{graph}(\varphi)$  は  $\mathbb{D}$  上の次の複素座標表示を持つ.

$$X_{\min} = (\text{Re}(f), \text{Im}(f), \text{Re}(F)) = (f, \text{Re}(F)). \quad (3.2)$$

最後の等式は,  $\mathbb{E}^3$  と  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  を同一視したことによる.

同様に,  $\Omega$  上の極大曲面方程式の解  $\psi$  による極大グラフ  $\text{graph}(\psi)$  も (3.1) による定義される関数  $F$  を用いて次のように表示することができる<sup>1</sup>.

$$X_{\max} = (\text{Re}(f), \text{Im}(f), \text{Im}(F)) = (f, \text{Im}(F)). \quad (3.3)$$

一般に, (3.3) の調和関数  $f$  は (3.2) 内のそれとは異なっているが, もし2つの式で同一の関数  $f$  を取ると, 対応する極小グラフと極大グラフは事実1の意味で双対対応している:

**命題 2.** 単位円板  $\mathbb{D}$  から領域  $\Omega$  への単葉調和関数  $f = h + \bar{g}$  ( $h, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ) で,  $\sqrt{h'g'}$  が一価正則な分枝を持つとする. このとき,

$$F(w) = F_f(w) = 2i \int_0^w \sqrt{h'g'} d\zeta, \quad (3.4)$$

と定めると次が成り立つ.

- (1) 関数  $\varphi = \text{Re}(F) \circ f^{-1}$  は  $\mathbb{E}^3$  内の極小グラフ  $\text{graph}(\varphi)$  を与え,  $X_{\min} = (f, \text{Re}(F))$  は  $\text{graph}(\varphi)$  の等温座標表示を与える.
- (2) 関数  $\psi = \text{Im}(F) \circ f^{-1}$  は,  $\mathbb{L}^3$  内の極大グラフ  $\text{graph}(\psi)$  を与え,  $X_{\max} = (f, \text{Im}(F))$  は  $\text{graph}(\psi)$  の等温座標表示を与える.
- (3)  $f$  が向きを保つとき, (1), (2) の  $\varphi$  と  $\psi$  は, 事実1の意味での双対関係になっている.  $f$  が向きを裏返すときは,  $\varphi$  と  $-\psi$  が双対関係になっている.

#### 4. 主結果

本節では第1節で述べた問題に対する回答として, 極小曲面の無限境界値問題と極大曲面に対する光的線分境界値問題の同値性を紹介する.

**定理 3.** 単連結な有界 Jordan 領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  がその境界  $\partial\Omega$  に開線分  $I$  を含むとする. 領域  $\Omega$  上の極小曲面方程式の解  $\varphi$  とその双対となる極大曲面方程式の解  $\psi$  を考え,  $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  を両者に対応する調和関数 (3節参照) とする. このとき, 次は同値になる.

<sup>1</sup>(3.2) と比較して  $X_{\max}$  の第三座標が  $\text{Im}(F)$  となっているのは,  $\mathbb{L}^3$  への写像  $X_{\max}$  の共形性による.

- (1)  $\varphi$ が $I$ 上で $+\infty$  (または $-\infty$ ) の値を取る.
- (2)  $\psi$ が $I$ 上で未来向き (または過去向き) の光的線分に忠実に退化する.

さらにこのとき, 次が成り立つ.

- (3)  $f$ の境界関数 $\hat{f}: \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\Omega$ の不連続点 $w_0 \in \partial\mathbb{D}$ が存在して,  $I \subset C(f, w_0)$ となる. ここで,  $C(f, w_0)$ は $f$ の $w_0$ における集積値集合であり,  $z = \lim_{w_n \rightarrow w_0} f(w_n), w_n \in \mathbb{D}$ となる点 $z$ からなる.

ここで, 極大曲面方程式の解 $\psi$ が, 線分 $I \subset \partial\Omega$ 上で未来向き (または過去向き) 光的線分に**忠実に退化する**とは,  $\tau$ を $I$ の正の単位方向,  $J \subset I$ を任意の部分閉線分として,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}(z) = 1 + O(\text{dist}(z, J)^2) \quad \left( \text{または} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\tau}(z) = -1 + O(\text{dist}(z, J)^2) \right) \quad \text{as } z \rightarrow J$$

を満たすことをいう. この光的線分への漸近退化条件は極小曲面方程式に対する勾配評価 [7, Lemma 1] に対応している.

また, 一般に極小曲面方程式の解 $\varphi$ が領域のある境界弧 $C$ で $\pm\infty$ に発散しているとき,  $C$ は線分になることが知られている ([11, p. 102]). この線分 $I$ が単葉調和関数 $f$ の境界の不連続点に対応するというのが定理3 (3)の主張である.

#### 4.1. 多角形領域の場合

領域 $\Omega$ が多角形領域である場合は, 次が成り立つ.

**系 4.** 定理3の記号の下で $\Omega$ が多角形領域のとき, 次は同値になる.

- (1) 各辺上で $\varphi(z) \rightarrow +\infty$ , または $\varphi(z) \rightarrow -\infty$ .
- (2) 各辺上で $\psi$ は光的線分に忠実に退化する.
- (3) 境界関数 $\hat{f} = f|_{\partial\mathbb{D}}$ は $\partial\Omega$ の頂点に値を取る階段関数.

(3)の主張によって,  $\mathbb{S}^1 \simeq \partial\mathbb{D}$ 上の階段関数から(1), (2)の境界値問題の解が構成できる. この事実を用いた(1)の解 (対応する曲面は**Jenkins-Serrin型曲面**と呼ばれる)の構成については, McDougall-Schaubroeck [10]に詳しい.

### 5. 双対や共役を取る操作と対称性の関係

極小曲面や極大曲面は複素座標系に対する座標関数が (それぞれの誘導計量に関して) 調和関数であるという特徴付けを持つ. したがって, 複素座標表示された極小曲面  $X_{\min}(w) = (x(w), y(w), t(w))$  に対して, それらの座標関数の共役調和関数を取って得られる曲面  $X_{\min}^*(w) = (x^*(w), y^*(w), t^*(w))$  もまた極小曲面となる. この曲面  $X_{\min}^*$  を  $X_{\min}$  の**共役曲面 (conjugate surface)** という. 同様の方法で, 極大曲面に対してもその共役曲面が定義される.

共役曲面の定義と命題2により, 極小曲面  $X_{\min}$  およびその双対極大曲面  $X_{\max}$  とそれらの共役曲面  $X_{\min}^*, X_{\max}^*$  には次の可換図式が成り立つ<sup>2</sup>. 以下,  $(x, y)$  を  $f = x + iy$  と同一視する.

$$\begin{array}{ccc} X_{\min} = (f, t) & \xrightarrow{\text{dual}} & X_{\max} = (f, t^*) \\ \text{conjugate} \downarrow & & \downarrow \text{conjugate} \\ X_{\min}^* = (f^*, t^*) & \xrightarrow{\text{dual}} & X_{\max}^* = (f^*, -t) \end{array}$$

上記の曲面4つ組に対して, 次のように対称性が移り合うことがわかる (図1参照).

<sup>2</sup> 命題2により, グラフ表示されているとは限らない曲面に対しても双対性の概念を拡張することができる.

**系 5.** 定理3の記号の下で,  $\partial\Omega$ が点  $z_0$  で内角  $\alpha$  で交わる二本の線分  $I_1, I_2$  を持つと仮定する.  $\varphi$  は  $I_1$  と  $I_2$  上で  $\pm\infty$  とし, さらにもし  $\alpha = \pi$  であれば,  $I_1$  と  $I_2$  上での  $\varphi$  の符号は異なっているとす<sup>3</sup>. このとき, 次が成り立つ.

- $X_{\min}$  は頂点  $z_0$  上で垂直線分  $L$  を持ち,  $L$  に対する線対称性を持つように曲面を拡張できる. さらに双対および共役曲面上では, 上記の  $L$  に対応する部分で次の性質が成り立つ.
- 双対  $X_{\max}$  は縮退特異点を持ち, それに対する点対称性を持つように曲面を拡張できる.
- 共役曲面  $X_{\min}^*$  は水平平面に含まれる曲率線を持ち, 水平平面に対する平面对称性を持つように曲面を拡張できる.
- 双対の共役曲面  $X_{\max}^*$  は折り目特異点の像としてナル曲線を持ち, そこで折り返し対称性 (folded symmetry) を持つように曲面を拡張できる.

ここで, 特異点を許容する極大曲面を定義する写像  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  に対して<sup>4</sup>, 領域  $D$  上の正則曲線  $\gamma: I \rightarrow D$  が存在して  $X \circ \gamma(I)$  が一点  $p \in \mathbb{L}^3$  になるとき,  $p$  を  $X$  の**縮退特異点 (shrinking singularity)** という. また,  $X$  に対してある等温座標系  $(U; u, v)$  が存在して  $X_v(u, 0) \equiv 0$  かつ  $\tilde{\gamma} = \{X(u, 0) \mid (u, 0) \in U\}$  が正則曲線になっているとき,  $\tilde{\gamma}$  を**折り目特異点 (folding singularity)** という. 詳しくは [9] を参照せよ.

また, 系5の無限遠方版の主張として次が成り立つ.

**系 6.** 定理3の記号の下で, 境界  $\partial\Omega$  が三本の線分  $I_1, I_2, I_3$  を持ち,  $I_j, I_{j+1}$  ( $j = 1, 2$ ) は点  $z_j$  で内角  $\alpha_j \neq \pi$  を持つとする.  $\varphi$  は  $I_2$  上では  $+\infty$  の値を取り,  $I_1, I_3$  上では  $\pm\infty$  の値を取るとする. このとき, 次が成り立つ.

- $X_{\min}$  は仮定より  $I_2 = (z_1, z_2)$  上で  $+\infty$  の値を取る.
- 双対  $X_{\max}$  は  $I_2$  上で未来向き光的線分を持つ.
- 共役曲面  $X_{\min}^*$  は  $(z_1 - z_2)$ -方向の無限遠方に長さ  $|I_2| = |z_2 - z_1|$  の垂直線分を持つ.
- 双対の共役曲面  $X_{\max}^*$  はナル曲線に沿って  $(z_1 - z_2)$ -方向の  $-\infty$  に伸びていく.

Karcher [8] は系5の  $X_{\min}$  と  $X_{\min}^*$  の対称性を利用して, 今日 **saddle tower** と呼ばれる曲面を構成した (図1の  $X_{\min}^*$  参照). 一方で, それらと双対対応する曲面  $X_{\max}$  と  $X_{\max}^*$  の二種類の特異点の対応関係も Kim-Yang [9] らによって明らかにされている. 本稿で扱った双対性は極小曲面と極大曲面を行き来できるため, 双方の研究に相補的な影響をもたらしている. 今後も双対性を用いた曲面の対称性や特異点の対応関係の更なる理解, 対称性の高い曲面の構成といった様々な研究の方向が期待される.

## 参考文献

- [1] S. Akamine and H. Fujino, *Duality of boundary value problems for minimal and maximal surfaces*. preprint. arXiv:1909.00975.
- [2] S. Akamine, M. Umehara, and K. Yamada, *Improvement of the Bernstein-type theorem for space-like zero mean curvature graphs in Lorentz-Minkowski space using fluid mechanical duality*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc. arXiv:1904.08046.

<sup>3</sup> 内角  $\alpha$  と境界線分  $I_1, I_2$  上での曲面の挙動には密接な関係がある. 例えば,  $\alpha < \pi$  であれば  $I_1, I_2$  上での  $\varphi$  の符号は自動的に異なることが示せる. また,  $\alpha = \pi$  かつ  $I_1, I_2$  上での  $\varphi$  の符号が同じであれば,  $z_0$  を含めた  $I_1 \cup I_2$  上で  $\varphi$  が発散し, 系5の主張が成り立たなくなる. 詳しくは, [1, Section 4.1] を参照.

<sup>4</sup> ここで, 写像  $X$  の**特異点**とは  $X$  がはめ込みでなくなる点をいう. 特異点を許容する極大曲面のクラスには様々なものがあるが, ここでは Estudillo-Romero [6] による**一般化された極大曲面 (generalized maximal surface)** を想定している.

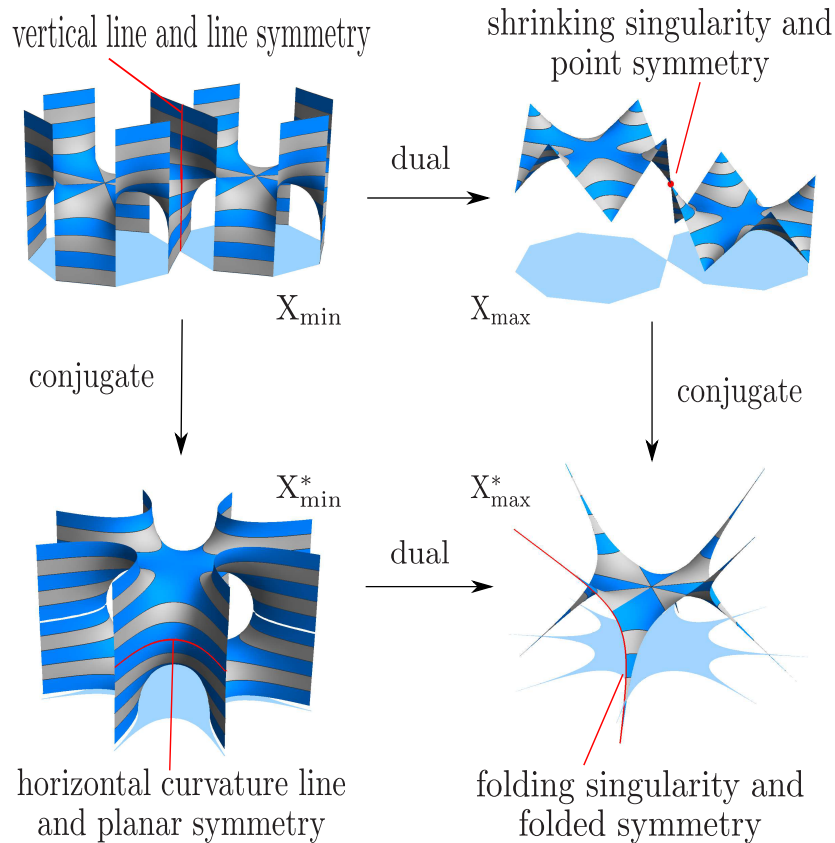


図 1: 曲面の 4 つ組 ( $X_{\min}$ ,  $X_{\max}$ ,  $X_{\min}^*$ ,  $X_{\max}^*$ ) と対称性.

- [3] D. Bshouty and A. Weitsman, *On the Gauss map of minimal graphs*, Complex Var. Theory Appl. **48** (2003), no. 4, 339–346. MR1972069
- [4] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968), 1970, pp. 223–230. MR0264210
- [5] P. Duren, *Harmonic mappings in the plane*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 156, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. MR2048384
- [6] F. J. M. Estudillo and A. Romero, *Generalized maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space  $L^3$* , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **111** (1992), no. 3, 515–524. MR1151327
- [7] H. Jenkins and J. Serrin, *Variational problems of minimal surface type. II. Boundary value problems for the minimal surface equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **21** (1966), 321–342. MR0190811
- [8] H. Karcher, *Embedded minimal surfaces derived from Scherk's examples*, Manuscripta Math. **62** (1988), no. 1, 83–114. MR958255
- [9] Y. W. Kim and S.-D. Yang, *Prescribing singularities of maximal surfaces via a singular Björling representation formula*, J. Geom. Phys. **57** (2007), no. 11, 2167–2177. MR2360235
- [10] J. McDougall and L. Schaubroeck, *Minimal surfaces over stars*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), no. 1, 721–738. MR2376192
- [11] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Second, Dover Publications, Inc., New York, 1986. MR852409
- [12] 梅原雅頭, 時空の極大曲面と Euclid 空間の極小曲面の流体力学的双対性とその応用. 部分多様体論・湯沢 2018 講演報告集, <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/yuzawa/2018/umehara2018.pdf>.
- [13] A. Weitsman, *On univalent harmonic mappings and minimal surfaces*, Pacific J. Math. **192** (2000), no. 1, 191–200. MR1741021