# 重複度付き対称三対と二重佐武図形

馬場 蔵人 （東京理科大学 理工学部）*

**概 要**

本研究は井川治氏（京都工芸繊維大学）との共同研究に基づく．

コンパクト対称対に対して佐武図形や重複度付き制限ルート系の概念が定義され，コンパクト型リーマン対称空間上のイソトロピー作用の軌道の性質などを調べるのにこれらの概念を用いた手法が確立され，多くの結果がこれまで得られてきた．コンパクト型リーマン対称空間上にはイソトロピー作用の自然な一般化として Hermann 作用とよばれる幾何学的に良い性質を備えた等長作用が定義される．この作用は超極性をもつことが知られており，標準形理論において重要な例を与えている．Hermann 作用の軌道の性質を調べる手法として重複度付き制限ルート系の概念を拡張した重複度付き対称三対の概念が井川治氏によって導入され，Hermann 作用の軌道の全測地性や austere 性などが明らかにされた．重複度付き対称三対のより深い理解は Hermann 作用の軌道幾何の発展やそれに関連する研究をする過程で有用であると考えられる．

本研究では，コンパクト対称三対の分類結果をもとに具体的な重複度付き対称三対を決定し，重複度付き対称三対を用いたコンパクト対称三対に関する同型定理を導く．この手法はコンパクト対称三対に対する二重佐武図形の概念に基づき，コンパクト対称三対が古典型か例外型に依らず包括的にコンパクト対称三対を扱うことができる．

## 1 二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類

単純コンパクトリー環 $\mathfrak{g}_u$ とその上の 2 つの対合 $\theta_1, \theta_2$ の 3 つ組 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ でコンパクト対称三対を表す．この節では，特に断りがない限り $\theta_1$ と $\theta_2$ の可換性は仮定しない．松木敏彦氏 ([6]) は次の同値関係 $\sim$ に関する同型類を分類した．

**定義 1.1.** 2 つのコンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と $(\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ が**同型**であるとは，$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$ と $\tau \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_u)$ で次の条件を満たすものが存在する：

$$\theta_1' = \varphi\theta_1\varphi^{-1}, \quad \theta_2' = \tau\varphi\theta_1\varphi^{-1}\tau^{-1}.$$

このとき，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ とかく．

この節では，松木敏彦氏の分類定理を二重佐武図形を用いて別証明を与えることを目的とする．その際，荒木捷朗氏 ([1]) による佐武図形を用いたコンパクト対称対の分類結果は既知とする．

コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ の二重佐武図形を定義する準備として，次の補題を与える．(後述の標準形の定義 2.1 も参照のこと.)

**補題 1.2.** $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と同型なコンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ と $\mathfrak{g}_u$ の極大可換部分リー環 $\mathfrak{t}$ で次の条件を満たすものが存在する：

(1) 各 $i = 1, 2$ に対して，$\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_i \subset \tilde{\mathfrak{m}}_i$ は極大可換部分空間である．ただし，$\tilde{\mathfrak{m}}_i$ は $\tilde{\theta}_i$ の $(-1)$ 固有空間とする．特に，$\mathfrak{t}$ は $\tilde{\theta}_i$ 不変である．

*E-mail: baba_kurando@ma.noda.tus.ac.jp

(2) $\Delta$ を $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}_u$ のルート系とし，$(\Delta, \sigma_1, \sigma_2) := (\Delta, -\theta_1|_{\mathfrak{t}}, -\theta_2|_{\mathfrak{t}})$ は $(\sigma_1, \sigma_2)$ 基本系 $\Pi$ を許容する．すなわち，$\Pi$ から定まる線形順序 $>$ は各 $i = 1, 2$ に対して $\alpha \in \Delta - \Delta_0^{(i)}$ が $\alpha > 0$ ならば $\sigma_i(\alpha) > 0$ となる．ただし，$\Delta_0^{(i)} = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha|_{\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_i} = 0\}$ とする．

以下では，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と $\mathfrak{g}_u$ の極大可換部分リー環 $\mathfrak{t}$ は補題 1.2 の条件 (1) と (2) を満たすものと仮定する．

**定義 1.3.** $\Pi \subset \Delta$ を $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$ の $(\sigma_1, \sigma_2)$ 基本系とする．$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ の $\Pi$ に付随する**二重佐武図形**を，$\Pi$ に付随する $(\mathfrak{g}_u, \theta_1)$ の佐武図形 $S_1$ と $(\mathfrak{g}_u, \theta_2)$ の佐武図形 $S_2$ の組 $(S_1, S_2)$ で定義し，$\Pi$ を $(S_1, S_2)$ の**基**とよぶ．二重佐武図形の定義は $(\sigma_1, \sigma_2)$ 基本系のとりかたに依らずに決まることが示される．

**定義 1.4.** 2 つの二重佐武図形 $(S_1, S_2)$ と $(S_1', S_2')$ の基をそれぞれ $\Pi$ と $\Pi'$ で表す．$(S_1, S_2)$ と $(S_1', S_2')$ が**同型**であるとは，Dynkin 図形の同型写像 $\psi : \Pi \to \Pi'$ で $\psi$ が $S_1$ から $S_1'$ への佐武図形の同型写像かつ $S_2$ から $S_2'$ への佐武図形の同型写像となるものが存在するときをいう．このとき，$(S_1, S_2) \sim (S_1', S_2')$ とかく．

このとき，[1, Theorem 2.14] の証明を模倣することで次の定理が示される．

**定理 1.5** ([2])**.** 2 つのコンパクト対称三対が同型であることとそれらの二重佐武図形が同型であることは同値である．

定理 1.5 によってコンパクト対称三対の分類は二重佐武図形の分類に帰着され，後者の分類はコンパクト対称対の佐武図形の分類結果を用いた簡単な考察で実行できる．ここでは 2 つの例を紹介する．

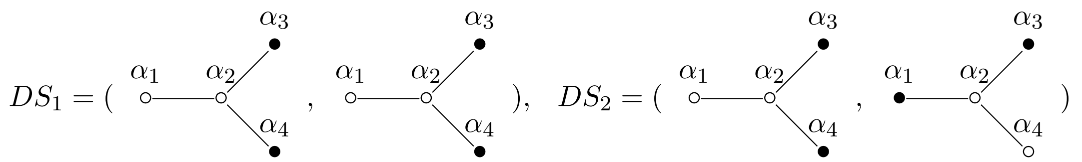
**例 1.** 次で定める空間 $\mathscr{T}_1$ を二重佐武図形を用いて決定する：

$$\mathscr{T}_1 = \{(\mathfrak{so}(8), \theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \text{ と } \theta_2 \text{ の固定部分環はともに } \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(6) \text{ に同型 }\}/\sim.$$

$\mathscr{T}_1$ と次で定める空間 $\mathscr{DS}_1$ との間に一対一対応が存在する：

$$\mathscr{DS}_1 = \{(S_1, S_2) \mid S_1 \text{ と } S_2 \text{ は } (\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(6)) \text{ の佐武図形に同型}\}/\sim.$$

このとき，$\mathscr{DS}_1$ の完全代表系として




をとることができる．さらに，$DS_1$ と $DS_2$ に対応するコンパクト対称三対はそれぞれ

$$(\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{2,6}), \mathrm{Ad}(I_{2,6})), \quad (\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{2,6}), \mathrm{Ad}(J_4))$$

で与えられることが確かめられる．

$$\mathscr{T}_1 = \{[(\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{2,6}), \mathrm{Ad}(I_{2,6}))], [(\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{2,6}), \mathrm{Ad}(J_4))]\}.$$

ただし，自然数 $k$ について $I_k$ で $k$ 次の単位行列を表したとき，$I_{2,6}, J_4 \in GL(8, \mathbb{R})$ を

$$I_{2,6} = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & -I_6 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} O & I_4 \\ -I_4 & O \end{pmatrix}$$

で定める．直接計算によって $(\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{2,6}), \mathrm{Ad}(J_4))$ は可換であることがわかる．

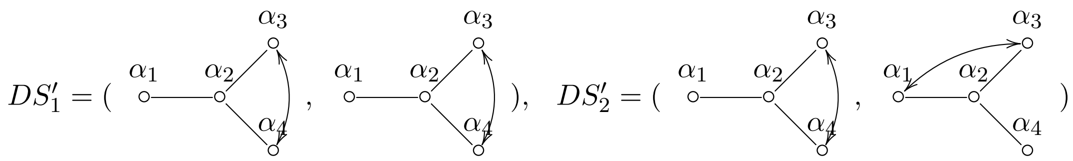
**例 2.** 次で定める空間 $\mathscr{T}_2$ を二重佐武図形を用いて決定する：

$$\mathscr{T}_2 = \{(\mathfrak{so}(8), \theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \text{ と } \theta_2 \text{ の固定部分環はともに } \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(5) \text{ に同型 }\}/_\sim.$$

$\mathscr{T}_2$ と次で定める空間 $\mathscr{D}\mathscr{S}_2$ との間に一対一対応が存在する：

$$\mathscr{D}\mathscr{S}_2 = \{(S_1, S_2) \mid S_1 \text{ と } S_2 \text{ は } (\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(5)) \text{ の佐武図形に同型}\}/_\sim$$

このとき，$\mathscr{D}\mathscr{S}_2$ の完全代表系として




をとることができる．さらに，$DS_1'$ と $DS_2'$ に対応するコンパクト対称三対はそれぞれ

$$(\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{3,5}), \mathrm{Ad}(I_{3,5})), \quad (\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{3,5}), \kappa\mathrm{Ad}(I_{3,5})\kappa^{-1})$$

で与えられることが確かめられる．ただし，$\kappa$ は $\mathfrak{so}(8)$ の位数 3 の外部自己同型写像とする．したがって，

$$\mathscr{T}_2 = \{[(\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{3,5}), \mathrm{Ad}(I_{3,5}))], [(\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{3,5}), \kappa\mathrm{Ad}(I_{3,5})\kappa^{-1})]\}.$$

特に，$\theta_1 = \mathrm{Ad}(I_{3,5}), \theta_2 = \kappa\mathrm{Ad}(I_{3,5})\kappa^{-1}$ とすると，$\theta_1\theta_2(\alpha_3) = \alpha_1 \neq \alpha_4 = \theta_2\theta_1(\alpha_3)$ となり，$(\mathfrak{so}(8), \mathrm{Ad}(I_{3,5}), \kappa\mathrm{Ad}(I_{3,5})\kappa^{-1})$ は非可換である．

## 2 コンパクト対称三対の標準形

コンパクト対称三対の同型類 $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ に対して，階数 $\mathrm{rank}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ と位数 $\mathrm{ord}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)] &= \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \text{ 内の極大可換部分空間}), \\
\mathrm{ord}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)] &= \min\left\{\mathrm{ord}(\theta_1'\theta_2') \mid (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2') \in [(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]\right\}.
\end{aligned}$$

ただし，$\mathrm{ord}(\theta_1'\theta_2')$ は $(\theta_1'\theta_2')^k$ が $\mathfrak{g}_u$ 上の恒等変換となる最小の自然数 $k$ で定義する．実際に，階数 $\mathrm{rank}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ が well-defined であることは $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ 内の極大可換部分空間の $\mathrm{Int}(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$ 共役性と Hermann の定理からわかる．なお，階数は Hermann 作用の余等質性を表す量となる．

この節では，コンパクト対称三対の同型類 $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ の中から「良い」代表元がとれることを説明する．この「良い」代表元を $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ の標準形とよび，次で定義する．

**定義 2.1** (コンパクト対称三対の標準形)**.** コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in [(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ が**標準形**であるとは，次の条件 (C1) と (C2) を満たす $\mathfrak{g}_u$ の極大可換部分リー環 $\mathfrak{t}$ が存在するときをいう：

(C1) $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ と $\mathfrak{t}$ は補題 1.2 の条件 (1) と (2) を満たす.

(C2) 次の関係式が成り立つ：

$$\begin{cases}
\mathrm{ord}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)] \overset{(\star 1)}{=} \mathrm{ord}(\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2) \overset{(\star 2)}{=} \mathrm{ord}(\sigma_1\sigma_2), \\
\mathrm{rank}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)] \overset{(\star 3)}{=} \dim(\mathfrak{t} \cap (\tilde{\mathfrak{m}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{m}}_2)).
\end{cases}$$

特に，$\mathfrak{t} \cap (\tilde{\mathfrak{m}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{m}}_2) \subset \tilde{\mathfrak{m}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{m}}_2$ は極大可換部分空間である.

このとき，$\mathfrak{t}$ を $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ の**標準的な極大可換部分リー環**とよぶ.

**定理 2.2** ([2])**.** コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ の同型類に対して標準形 $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ が存在する.

**注意 2.3.** (1) 定理 2.2 の条件 (C2) によりコンパクト対称三対の同型類 $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ の階数と位数は二重佐武図形を用いて求めることができる.

(2) 標準形の一意性は一般には成り立たないことが確かめられる．具体的な例については後述の例 3 で紹介する.

定理 2.2 の証明方針．$\theta_1 \not\sim \theta_2$ の場合を考えれば十分である．ここで，$\theta_1$ と $\theta_2$ が $\mathfrak{g}_u$ の内部自己同型写像で移り合うとき $\theta_1 \sim \theta_2$ とかくことにする．補題 1.2 より条件 (C1) を満たす $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ の代表元 $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}'_1, \tilde{\theta}'_2)$ と $\mathfrak{g}_u$ の極大可換部分リー環 $\mathfrak{t}'$ がとれることはわかっているとしてよい．このとき，必要に応じて条件 (C1) が成り立ったまま $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}'_1, \tilde{\theta}'_2)$ と $\mathfrak{t}'$ をとりなおすことによって定理 2.2 の証明を与える：$(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}'_1, \tilde{\theta}'_2)$ は $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}'_1, \tilde{\theta}'_2) = (\mathfrak{g}_u, \theta_1, \tau_0\theta_2\tau_0^{-1})$ $(\tau_0 \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_u))$ として一般性を失わない．このとき，次の手順によって定理 2.2 の証明を与える：

(Step 1) $H \in \mathfrak{t}$ で $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, e^{\mathrm{ad}(H)}\tau_0\theta_2\tau_0^{-1}e^{-\mathrm{ad}(H)}) =: (\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ が $(\star 2)$ を満たすものを与える．特に，$(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ が可換であるかを判定する.

(Step 2) $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ が可換化可能であるかで場合分け：

- $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ が可換のときは，仮定から $(\star 1)$ を満たすことがわかる．[7] の結果より標準的な極大可換部分リー環 $\mathfrak{t}$ の存在も示せることから $(\star 3)$ がわかる.
- $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ が非可換のときは，分類結果を基に $(\mathfrak{g}_u, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ と $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}'$ が $(\star 1)$ と $(\star 3)$ を満たすことを case-by-case で示す.

□

## 3 可換なコンパクト対称三対の重複度付き対称三対

この節では，可換なコンパクト対称三対と重複度付き対称三対の関係について説明する．抽象的な重複度付き対称三対の一般論については [4]，その分類については [4], [2] を参照のこと.

$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ を可換なコンパクト対称三対とする．$\theta_1$ と $\theta_2$ の可換性から $\mathfrak{g}_u$ の $(\theta_1, \theta_2)$ による同時固有空間分解を得る：$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{m}_2 = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$. $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ 上に $\{\mathrm{ad}(H)\}_{H \in \mathfrak{a}} \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g}_u^{\mathbb{C}})$ に関する $\mathfrak{g}_u^{\mathbb{C}}$ の同時固有空間分解を用いて重複度付き対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ が構成されることを井川治氏 ([4]) は明らかにした. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ を $\mathfrak{a}$ に関する $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ の**重複度付き対称三対**とよぶ．なお，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ の構成法より $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1)$ は同じ重複度付き対称三対を定める．このとき，次の定理を得る.

**定理 3.1** ([2])**.** $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2), (\mathfrak{g}_u, \theta'_1, \theta'_2)$ を 2 つの可換化可能なコンパクト対称三対とし，それぞれに付随する重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n), (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ で表す．このとき，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta'_1, \theta'_2)$ または $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta'_1, \theta'_2)$ となるための必要十分条件は，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n) \sim (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ となることである.

**注意 3.2.** (1) 定理 3.1 の主張にある重複度付き対称三対に対する関係 $\sim$ は対称三対に関する同値関係 [4, Definition 2.6] の自然な拡張として定義される.

(2) 定理 3.1 によって可換化可能なコンパクト対称三対と重複度付き対称三対は generic には 2:1 に対応することがわかる．$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1)$ が成り立つかどうかはコンパクト対称三対の分類結果からわかる．実際，$\theta_1 \not\sim \theta_2$ のときそのようなものは $[(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m)')]$ に限る.

定理 3.1 は [4, Theorem 4.33] の精密化に相当する．必要性の証明もその証明を模倣することで与えられる．十分性の証明は可換化可能なコンパクト対称三対の分類結果を基に具体的な重複度付き対称三対を求めることで示される．重複度付き対称三対を決定する際には，次で定義される $(\theta_1, \theta_2)$ に関する構造定数 $\{s_{i,\alpha} \mid i = 1, 2, \alpha \in \Delta\} \subset \mathbb{C}$ を利用する：$\overline{X_\alpha} = -X_{-\alpha}$ を満たす Chevalley 基底 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ を 1 つ固定したものとで，

$$\theta_i(X_\alpha) = s_{i,\alpha} X_{\theta_i(\alpha)} \quad (i = 1, 2, \alpha \in \Delta).$$

また，$\Sigma = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid m(\alpha) > 0\}, W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid n(\alpha) > 0\}$ となるので，重複度 $m, n$ が求まれば十分であり，これらを求める公式として次の補題が与えられる．

**補題 3.3.** 部分集合 $\Delta_0, \Delta_{12}, \Delta_\times \subset \Delta$ を次で定める：$\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha|_{\mathfrak{a}} = 0\}$,

$$\Delta_{12} = \{\alpha \in \Delta - \Delta_0 \mid \theta_1\theta_2(\alpha) = \alpha\}, \quad \Delta_\times = \{\alpha \in \Delta - \Delta_0 \mid \theta_1\theta_2(\alpha) \neq \alpha\}.$$

このとき，$\lambda \in \tilde{\Sigma}$ の重複度 $m(\lambda), n(\lambda)$ に対して次が成り立つ：

$$(*) : \begin{cases} m(\lambda) = \#\{\alpha \mid \alpha \in \Delta_{12}, s_{1,\alpha} = s_{2,\alpha}, \alpha|_{\mathfrak{a}} = \lambda\} + \dfrac{1}{2}\#\{\beta \mid \beta \in \Delta_\times, \beta|_{\mathfrak{a}} = \lambda\}, \\ n(\lambda) = \#\{\alpha \mid \alpha \in \Delta_{12}, s_{1,\alpha} = -s_{2,\alpha}, \alpha|_{\mathfrak{a}} = \lambda\} + \dfrac{1}{2}\#\{\beta \mid \beta \in \Delta_\times, \beta|_{\mathfrak{a}} = \lambda\}. \end{cases}$$

補題 3.3 の計算公式 $(*)$ の中で本質的な困難は $s_{1,\alpha} = \pm s_{2,\alpha}$ の符号の決定にあり，その計算過程で S. Klein ([5]) による構造定数の計算テクニックは有用である．なお，具体的な重複度付き対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ の計算結果は松木敏彦氏 ([6, Section 4]) からも読み取れるが，我々の結果は $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ と「同値」な他の代表元もすべて明示的に与えることができる．

最後に，次の同値関係 $\equiv$ に関する同型定理を説明する．

**定義 3.4.** 2 つのコンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と $(\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ が**強い意味での同型**であるとは，$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$ で次の条件を満たすものが存在する：

$$\theta_1' = \varphi\theta_1\varphi^{-1}, \quad \theta_2' = \varphi\theta_2\varphi^{-1}.$$

このとき，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \equiv (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ とかく．

明らかに，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \equiv (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ ならば $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ である．この逆は一般に成り立つとは限らないが，重複度付き対称三対に $\sim$ よりも強い同値関係 $\equiv$ を定義したとき，次の定理を導くことができる．

**定理 3.5** ([2])**.** $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2), (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ を 2 つの可換なコンパクト対称三対とし，それぞれに付随する重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n), (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ で表す．このとき，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \equiv (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ または $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1) \equiv (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ となるための必要十分条件は，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n) \equiv (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ となることである．

定理 3.5 によって重複度付き対称三対の分類結果からコンパクト対称三対の $\equiv$ に関する分類結果を得た．ここでは，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ であるが $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \not\equiv (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ となる例を紹介する．よって，この例は標準形の一意性が一般には成り立たないことを意味する．

**例 3.** 2 つのコンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) = (\mathfrak{so}(4p), \mathrm{Ad}(I_{2p,2p}), \mathrm{Ad}(J_{p,p}))$ と $(\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2') = (\mathfrak{so}(4p), \mathrm{Ad}(I_{2p,2p}), \mathrm{Ad}(J_{2p}))$ について考察する．ただし，$I_{2p,2p}, J_{p,p}, J_{2p} \in GL(4p, \mathbb{R})$ を

$$I_{2p,2p} = \begin{pmatrix} I_{2p} & O \\ O & -I_{2p} \end{pmatrix}, \quad J_{p,p} = \begin{pmatrix} O & I_p & & \\ -I_p & O & & \\ & & O & I_p \\ & & -I_p & O \end{pmatrix}, \quad J_{2p} = \begin{pmatrix} O & I_{2p} \\ -I_{2p} & O \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1, \theta_1'\theta_2' = \theta_2'\theta_1'$ となり，$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_1' = \mathfrak{so}(2p) \oplus \mathfrak{so}(2p)$ および $\mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_2' \simeq \mathfrak{u}(2p)$ が確かめられる．また，これらの二重佐武図形を求めることで $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ がわかる．行列計算によって，

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2} \simeq \mathfrak{u}(2p), \\ \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \simeq \mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(p), \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_u^{\theta_1'\theta_2'} \simeq \mathfrak{so}(2p) \oplus \mathfrak{so}(2p), \\ \mathfrak{k}_1' \cap \mathfrak{k}_2' \simeq \mathfrak{so}(2p), \end{cases}$$

となる．よって $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \not\simeq \mathfrak{k}_1' \cap \mathfrak{k}_2'$ であり，これは $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \not\equiv (\mathfrak{g}_u, \theta_1', \theta_2')$ を導びく．

一方で，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と $(\mathfrak{g}_u', \theta_1', \theta_2')$ に対応する重複度付き対称三対をそれぞれ $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ と $(\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ で表すと

$$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n) = (\text{I-}C_p; m, n) = (C_p, C_p, D_p; m, n),$$
$$(\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n') = (\text{I'-}C_p; m', n') = (C_p, D_p, C_p; m', n')$$

となることが上記の計算公式を用いて示される.（この例は行列計算でも求めることができる.）したがって，抽象的な重複度付き対称三対の分類結果を用いて $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n) \sim (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ であるが $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n) \not\equiv (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ となることがわかり，上記の考察と整合していることが確かめられる．

**注意 3.6.** 重複度付き対称三対はコンパクト対称三対に対応する重複度付き制限ルート系として考えているが，このときのコンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ は $\mathrm{ord}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)] = 2$ となる標準形をモデルに対して定義されたと捉えることができる．そこで，$\mathrm{ord}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)] \neq 2$ となるコンパクト対称三対の標準形をモデルにしたときの重複度付き対称三対（もどき）について考察の対象を広げるのは自然である．実際，$\mathrm{ord}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)] = 1$ は本質的に重複度付き制限ルート系の概念として捉えることができ，その分類結果は一般化された双対性を用いた半単純擬リーマン対称対の分類に役に立つことがわかっている ([3])．また，$\mathrm{ord}[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)] \geq 3$ となるものについても二重佐武図形を用いた計算方法によって重複度付き対称三対（もどき）が松木敏彦氏 ([6, Section 4]) の結果と一致することが確かめられる．さらにその結果と重複度付き対称三対（もどき）に関する同型を適切に定義することによって，定理 3.1 に相当する結果も導くことができる．

## 参考文献


[1] S. Araki, On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, Journal of Mathematics, Osaka city university, **13**, 1–34.

[2] K. Baba and O. Ikawa, Canonical forms in compact symmetric triads, in preparation.

[3] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, An alternative proof for Berger's classification of semisimple pseudo-Riemannian symmetric pairs from the view point of compact symmetric triads, in preparation.

[4] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan, Volume 63, Number 1 (2011), 79-136.

[5] S. Klein, Reconstructing the geometric structure of a Riemannian symmetric space from its Satake diagram, Geom Dedicata **138** (2009), 25–50.

[6] T. Matsuki, Classification of two involutions on compact semisimple Lie groups and root systems, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.

[7] T. Oshima and J. Sekiguchi, The Restricted Root System of a Semisimple Symmetric Pair, Advanced Studies in Pure Mathematics **4** (1984), 433–497.