Monge-Ampère 方程式の一般化について

川又将大 (広島大学理学研究科) *

1　導入

本講演の内容は，広島大学の澁谷一博氏との共同研究に基づく．

Monge-Ampère 方程式は古くから知られている 2 独立変数 1 未知関数 2 階偏微分方程式のクラスであり，波動方程式や熱方程式などの数理物理学的にも重要な方程式を数多く含んでいる．このクラスに属する方程式は 2 階の偏微分方程式でありながら，1 階の偏微分方程式として扱うことができる．さらに，この方程式のクラス自体は未知関数の導関数を成分とする行列の小行列式の和で構成されるという性質を有している．このような性質を持つ他の方程式として，森本徹氏が [1] において定義した，独立変数の個数が一般化された Monge-Ampère 方程式が挙げられる．これは，外微分式系と呼ばれる É. Cartan，É. Goursat の時代から研究されてきた概念を用いて，Monge-Ampère 方程式を Monge-Ampère system という形で幾何学的に定式化し，それに対応する方程式として得られたものである．

今回，講演者は Monge-Ampère system を一般化し，$(k+1)$ 階の方程式でありながら k 階の方程式として取り扱えるような偏微分方程式の新しいクラスを求めた．さらに，講演者らが定義した偏微分方程式と，一般化された Monge-Ampère system が幾何学的に対応するということを明示的に示した．

2　外微分式系，積分多様体，jet 空間

多様体 M 上の微分形式全体の集合，および M 上の i 次微分形式全体の集合をそれぞれ $\Omega^*(M)$, $\Omega^i(M)$ によって表す．また，$\Omega^*(M)$ には通常の和とウェッジ積で非可換環の構造が入ることに注意しておく．

定義 2.1. $\Omega^*(M)$ の部分集合 $\mathcal{I}$ が以下の 2 つの条件を満たすとき，M 上の**外微分式系**であるという:

(1) $\mathcal{I}$ は $\Omega^*(M)$ の斉次イデアルである．つまり $\mathcal{I}$ は $\Omega^*(M)$ のイデアルであって

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (\mathcal{I} \cap \Omega^i(M))$$

と表示できる．

(2) $\mathcal{I}$ は M 上の外微分 d で閉じている．つまり $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ が成り立つ．

定義 2.2. $\omega_i \in \Omega^{k_i}(M)$ $(1 \leq i \leq r)$ とするとき，

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}_{\mathrm{diff}} := \{\sum_{i=1}^{r} (\varpi_i \wedge \omega_i + \eta_i \wedge (d\omega_i)) \mid \varpi_i, \eta_i \in \Omega^*(M)\}$$

を $\omega_1, \ldots, \omega_r$ **で生成された外微分式系**と呼ぶ．

* email: masahiro-kawamata@hiroshima-u.ac.jp, URL: https://sites.google.com/site/masahirokawamata3152/

定義 2.3. $\mathcal{I}$ を M 上の外微分式系とする．M の部分多様体 $\iota\colon N \hookrightarrow M$ が $\iota^*\mathcal{I} = \{0\}$ を満たすとき，N を $\mathcal{I}$ の**積分多様体**とよぶ．

次に jet 空間を定義するが，その前にいくつかの記号を用意しておく: $M_k := \{(i_1, \ldots, i_k) \mid i_j \in \{1, \ldots, n\}\}$ とする．M_k の 2 つの元は，k 次対称群の元によって移り合うとき同じであるとみなす．このような同値関係による M_k の商集合を S_k と書き，$\Sigma_k := \bigsqcup_{j=1}^k S_j$ と定める．ここで $\#S_k = {}_n\mathrm{H}_k$，$\#\Sigma_k = \sum_{j=1}^k {}_n\mathrm{H}_k$ であることに注意する．また，$I = (i_1, \ldots, i_k) \in M_k$ のとき，$p_I := p_{i_1\cdots i_k}$，$p_{Ij} := p_{i_1\cdots i_k j}$ とする．

定義 2.4.

$$J^k(n,m) := \{(x_i, z^\alpha, p_I^\alpha, p_{Ii}^\alpha) \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le \alpha \le m,\ I \in \Sigma_{k-1}\}$$

とおき，これを (n,m) **型 k-jet 空間**という．さらに，

$$\omega^\alpha := dz^\alpha - \sum_{i=1}^n p_i^\alpha dx_i,\ \ \omega_I^\alpha := dp_I^\alpha - \sum_{i=1}^n p_{Ii}^\alpha dx_i \ \ (1 \le \alpha \le m,\ I \in \Sigma_{k-1}),$$

として，$\mathcal{C}^k := \{\omega^\alpha, \omega_I^\alpha \mid 1 \le \alpha \le m,\ I \in \Sigma_{k-1}\}_{\mathrm{diff}}$ とおく．$\mathcal{C}^k$ を $J^k(n,m)$ 上の **canonical system** とよぶ．

例 2.5. $k=1,\ m=1$ のとき，多様体として $J^1(n,1) = \{(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\} \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$ である．またこのとき，$\mathcal{C}^1 = \{dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i\}_{\mathrm{diff}}$ である．つまり $(J^1(n,1), \mathcal{C}^1)$ は $(2n+1)$ 次元接触多様体である．

3 Monge-Ampère 方程式，Monge-Ampère system

本節では Monge-Ampère 方程式，および [1] において述べらている Monge-Ampère system の定義とそれらの間の対応を紹介する．

定義 3.1 ([1])**.** n 変数 2 階 1 未知関数の単独型偏微分方程式

$$\sum_{l=0}^n \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_l\le n \\ 1\le j_1<\cdots<j_{n-l}\le n}} F_{i_1\ldots i_l}^{j_1\cdots j_{n-l}} \Delta_{j_1\cdots j_{n-l}}^{i_1\ldots i_l}(z) = 0 \ \ (F_{i_1\ldots i_l}^{j_1\cdots j_{n-l}} \text{ は } x_i, z, z_{x_i} \text{ の関数}),$$

$$\Delta_{j_1\cdots j_{n-l}}^{i_1\ldots i_l}(z) := \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, l, l+1, \ldots, n \\ i_1, i_2, \ldots, i_l, k_1, \ldots, k_{n-l} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} z_{x_{j_1}x_{k_1}} & \cdots & z_{x_{j_1}x_{k_{n-l}}} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{x_{j_{n-l}}x_{k_1}} & \cdots & z_{x_{j_{n-l}}x_{k_{n-l}}} \end{vmatrix},$$

$$(\text{ただし } \{1, \ldots, n\} = \{i_1, \ldots, i_l, k_1, \ldots, k_{n-l}\}\ (k_1 < \cdots < k_{n-l})),$$

を **Monge-Ampère 方程式** (MA 方程式) という．

例 3.2. $n=2$ のときは古典的によく知られた以下の方程式が得られる:

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} + D + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0,$$

$$(A, B, C, D, E \text{ は } x, y, z, z_x, z_y \text{ の関数}).$$

定義 3.3 ([1])**.** $J^1(n,1)$ 上の外微分式系 $\mathcal{I}$ が n-form Ψ を用いて $\mathcal{I} = \{\mathcal{C}^1, \Psi\}_{\mathrm{diff}}$ と書かれるとき，$\mathcal{I}$ を $J^1(n,1)$ 上の **Monge-Ampère system** (MAS) とよぶ．

次の定理は MA 方程式と MAS の間のある種の幾何学的対応を述べたものである.

定理 3.4 ([1]). 任意の MA 方程式に対して MAS が存在し，MA 方程式の解と MAS の積分多様体は対応する. またこの逆も成り立つ. 即ち，任意の MAS に対して MA 方程式が存在し，MA 方程式の解と MAS の積分多様体は対応する.

4 主結果

本節では，Monge-Ampère system，Monge-Ampère 方程式の一般化，およびそれらの間の幾何学的対応を述べる. まず，Monge-Ampère system の一般化を与える.

定義 4.1. $J^k(n,m)$ 上の外微分式系 $\mathcal{I}$ が l-form Ψ を用いて $\mathcal{I}=\{\mathcal{C}^k,\Psi\}_{\mathrm{diff}}$ と書かれるとき，$\mathcal{I}$ を $J^k(n,m)$ 上の **generalized Monge-Ampère system (GMAS)** とよぶ.

注意 4.2.

(1) $k=1, m=1, l=n$ としたとき，定義から明らかに GMAS は MAS に一致する.

(2) 上記の定義において，$\Psi\not\equiv 0 \mod \mathcal{C}^k$ ならば $1\le l\le n$ であることがわかる.

(3) $J^k(n,m)$ 上の GMAS 全体の集合は $J^k(n,m)$ 上の “接触変換” で閉じることが定義から直ちにわかる.

記号 4.3. 以下で使う記号を設定しておく:

- $z_{Ij} := z_{x_{i_1}\cdots x_{i_k}x_j}$ $(I=(i_1,\ldots,i_k))$
- $M(n,m;k) := \begin{pmatrix} (z^1_{I1})_{I\in S_k} & \cdots & (z^m_{I1})_{I\in S_k} \\ \vdots & & \vdots \\ (z^1_{In})_{I\in S_k} & \cdots & (z^m_{In})_{I\in S_k} \end{pmatrix}$

  ここで，$(z^\alpha_{Ij})_{I\in S_k}$ は S_k に辞書式順序をいれて，その順序に関して z^α_{Ij} を左から昇順に並べた ${}_n\mathrm{H}_k$ 次元横ベクトルである.

次に Monge-Ampère 方程式の一般化を与える.

定義 4.4. 自然数 n,m,k,l $(1\le l\le n)$ を固定する. 次の操作をして得られる偏微分方程式を **generalized Monge-Ampère 方程式** (または単に GMA 方程式) という:

Step 1 行列 $M(n,m;k)$ から第 ν_1 行, $\ldots$, 第 ν_l 行 $(\nu_1<\cdots<\nu_l)$ を取り出す.

Step 2 Step 1 で取り出した行列の全ての小行列式を考える. このとき，このような小行列式は以下の形をしていることに注意する:

$$H^{I_1^{\alpha_1}\ldots I_{\lambda_1}^{\alpha_1}\ldots I_1^{\alpha_t}\ldots I_{\lambda_t}^{\alpha_t}}_{j_1^{\alpha_1}\ldots j_{\lambda_1}^{\alpha_1}\ldots j_1^{\alpha_t}\ldots j_{\lambda_t}^{\alpha_t}}(z^{\alpha_1},\ldots,z^{\alpha_t}) := \begin{vmatrix} z^{\alpha_1}_{I_1^{\alpha_1}j_1^{\alpha_1}} & \cdots & z^{\alpha_1}_{I_{\lambda_1}^{\alpha_1}j_1^{\alpha_1}} & & z^{\alpha_t}_{I_1^{\alpha_t}j_1^{\alpha_1}} & \cdots & z^{\alpha_t}_{I_{\lambda_t}^{\alpha_t}j_1^{\alpha_1}} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ z^{\alpha_1}_{I_1^{\alpha_1}j_{\lambda_t}^{\alpha_t}} & \cdots & z^{\alpha_1}_{I_{\lambda_1}^{\alpha_1}j_{\lambda_t}^{\alpha_t}} & & z^{\alpha_t}_{I_{\lambda_t}^{\alpha_t}j_{\lambda_t}^{\alpha_t}} & \cdots & z^{\alpha_t}_{I_1^{\alpha_t}j_{\lambda_t}^{\alpha_t}} \end{vmatrix}, \tag{4.1}$$

ここで t は (4.1) に現れる未知関数の個数，λ_i $(1\le i\le t)$ は (4.1) に現れる z^{α_i} の偏導関数の個数，λ_0 は第 ν_1 行, $\ldots$, 第 ν_l 行から選ばれなかった行の個数である. ここで $\sum_{r=1}^t\lambda_r = l-\lambda_0$ が成り立つこと

に注意する．

Step 3 添え字の集合 $\{i_1,\dots,i_{\lambda_0}\}$ を

$$\{i_1,\dots,i_{\lambda_0}\}:=\{\nu_1,\dots,\nu_l\}\setminus\{j_1^{\alpha_1},j_2^{\alpha_1},\dots,j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\}\ \ (i_1<\cdots<i_{\lambda_0}).$$

と定義する．Step 2 で考えた小行列式 (4.1) に以下の $x_i,z^\alpha,p^\alpha(1\le i\le n,1\le\alpha\le m,I\in S_k)$ の関数を掛ける:

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_{\lambda_0},j_1^{\alpha_1},j_2^{\alpha_1},\dots,j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\\ \nu_1,\dots,\nu_{\lambda_0},\nu_{\lambda_0+1},\nu_{\lambda_0+2},\dots,\nu_l\end{pmatrix}A_{i_1\dots i_{\lambda_0}}^{I_1^{\alpha_1}I_2^{\alpha_1}\dots I_{\lambda_t}^{\alpha_t}} \tag{4.2}$$

この操作を Step 1 で取り出した小行列全てに対して行い，それらを足し合わせる．このとき，以下の方程式を得る:

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{\lambda_0=0}^{l}\sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_t=l-\lambda_0}\sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_t}\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_{\lambda_0}\\ j_1^{\alpha_1}<j_2^{\alpha_1}<\cdots<j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\\ \{i_1,\dots,j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\}=\{\nu_1,\dots,\nu_l\}}}\sum_{\substack{I_1^{\alpha_1}<\cdots<I_{\lambda_1}^{\alpha_1}\\ \cdots\\ I_1^{\alpha_t}<\cdots<I_{\lambda_t}^{\alpha_t}}}$$
$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_{\lambda_0},j_1^{\alpha_1},j_2^{\alpha_1},\dots,j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\\ \nu_1,\dots,\nu_{\lambda_0},\nu_{\lambda_0+1},\nu_{\lambda_0+2},\dots,\nu_l\end{pmatrix}A_{i_1\dots i_{\lambda_0}}^{I_1^{\alpha_1}I_2^{\alpha_1}\dots I_{\lambda_t}^{\alpha_t}}H_{j_1^{\alpha_1}\dots j_{\lambda_1}^{\alpha_1}\dots j_1^{\alpha_t}\dots j_{\lambda_t}^{\alpha_t}}^{I_1^{\alpha_1}\dots I_{\lambda_1}^{\alpha_1}\dots I_1^{\alpha_t}\dots I_{\lambda_t}^{\alpha_t}}(z^{\alpha_1},\dots,z^{\alpha_t})=0$$

Step 4 Step1 から Step3 を $M(n,m;k)$ の行の取り出し方全てに対して行う．最後に，得られた方程式を連立させることにより以下の方程式系が定まり，これを **generalized Monge-Ampère 方程式** (GMA 方程式) という:

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{\lambda_0=0}^{l}\sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_t=l-\lambda_0}\sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_t}\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_{\lambda_0}\\ j_1^{\alpha_1}<j_2^{\alpha_1}<\cdots<j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\\ \{i_1,\dots,j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\}=\{\nu_1,\dots,\nu_l\}}}\sum_{\substack{I_1^{\alpha_1}<\cdots<I_{\lambda_1}^{\alpha_1}\\ \cdots\\ I_1^{\alpha_t}<\cdots<I_{\lambda_t}^{\alpha_t}}}$$
$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_{\lambda_0},j_1^{\alpha_1},j_2^{\alpha_1},\dots,j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\\ \nu_1,\dots,\nu_{\lambda_0},\nu_{\lambda_0+1},\nu_{\lambda_0+2},\dots,\nu_l\end{pmatrix}A_{i_1\dots i_{\lambda_0}}^{I_1^{\alpha_1}I_2^{\alpha_1}\dots I_{\lambda_t}^{\alpha_t}}H_{j_1^{\alpha_1}\dots j_{\lambda_1}^{\alpha_1}\dots j_1^{\alpha_t}\dots j_{\lambda_t}^{\alpha_t}}^{I_1^{\alpha_1}\dots I_{\lambda_1}^{\alpha_1}\dots I_1^{\alpha_t}\dots I_{\lambda_t}^{\alpha_t}}(z^{\alpha_1},\dots,z^{\alpha_t})=0$$
$$(\nu_1<\cdots<\nu_l).$$

注意 4.5. 自然数 l $(1\le l\le n)$ を固定するとき，行列 $M(n,m;k)$ から定まる GMA 方程式は，一般には $(k+1)$ 階 n 変数 m 未知関数で方程式の個数が ${}_n\mathrm{C}_l$ の連立型偏微分方程式である．

例 4.6 ($n=2,k=m=l=1$ の場合)**.** $n=2,k=m=1$ であるから

$$M(2,1;1)=\begin{pmatrix} z_{x_1x_1} & z_{x_2x_1}\\ z_{x_1x_2} & z_{x_2x_2}\end{pmatrix}$$

となる．ここで $l=1$ であるため $M(2,1;1)$ から 1 行取り出す．次に，取り出した行列の 1 次以下の小行列式を全て考え，それに (4.2) を掛けながら足し合わせる．今，行の取り出し方は 2 通りあるため，もう片方の行に対しても同様のことをすることで，以下の方程式を得る:

$$\begin{cases} A^1z_{x_1x_1}+A^2z_{x_1x_2}+A_1=0\\ A^1z_{x_1x_2}+A^2z_{x_2x_2}+A_2=0\end{cases}\quad (A^1,A^2,A_1,A_2\text{は } x_1,x_2,z,p_1,p_2 \text{ の関数})$$

以下が本講演の主定理である．

定理 4.7. 任意の $(k+1)$ 階の GMA 方程式に対して，k-jet 空間上で定義された GMAS が存在して，与えられた方程式の解と GMAS の積分多様体は対応する．またこの逆も成り立つ．

上記定理は，$(k+1)$ 階の GMA 方程式は階数が 1 つ下がった k-jet 空間上の GMAS で捉えることができるということを主張している．これによって，$(k+1)$ 階の GMA 方程式の範疇に入るような方程式は，外微分式系を用いると k 階の方程式として扱えるということがわかる．

参考文献

[1] Morimoto T., Monge-Ampère equations viewed from contact geometry, in: Symplectic Singularities and Geometry of Gauge Fields, Banach Center Publ. 39 (Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995), 105–120.