一般化された直交対称性による
ラグランジュ平均曲率流の構成

落合 亮文

1　導入

平均曲率流は，Riemann 多様体に与えられた部分多様体の標準的な変形を与える． その変形は部分多様体の体積をもっとも効率よく減らすことで知られ，平均曲率流は極小部分多様体を探すための基礎的手段とみなされる．特にアンビエント空間が Kähler-Einstein 多様体のとき，平均曲率流は Lagrange 性を保って推移することが知られており，このことは Lagrange 平均曲率流が，極小 Lagrange 部分多様体（特に特殊 Lagrange 部分多様体）を見つけるための手段となることを意味している．

平均曲率流がどのような条件のもとに極小部分多様体に収束するか，特に Calabi-Yau 多様体内の Lagrange 平均曲率流がいつ特殊 Lagrange 部分多様体に収束するか，という主要な問題を巡り，具体例の構成や特異点の研究が行われている．

平均曲率流は偏微分方程式によって規定されるため，一般にこれを解いて具体例を構成することは困難である．Yamamoto [4] は，それまでに知られていたいくつかの例が，運動量写像とトーラス対称性によって説明されることを指摘し，トーリック概 Calabi-Yau 多様体における変形 Lagrange 平均曲率流の構成法を示した．Konno [2] は，これを運動量写像と可換 Lie 群の "直交対称性" を用いた手法に拡張し，非平坦 hyperKähler 多様体である ALE 空間において Lagrange 平均曲率流の具体例を構成することに成功している．これは非平坦な Calabi-Yau 多様体における Lagrange 平均曲率流の最初の構成例とみなされている．ここで述べた "直交対称性" とは，ある Lie 群 H の作用が，ある特殊 Lagrange 部分多様体 L に対して直交するように作用しているような状況を指している．このようなきれいな対称性がある場合に，L に直交する Lagrange 部分多様体 L' で，H 不変なものが構成でき，ひいては H 不変な Lagrange 平均曲率流が構成される，というのが Konno の理論の概要である．特に，Konno は $\mathbb{C}^n$ において，自己相似解およびトランスレーティング・ソリトンと呼ばれる，平均曲率流のよいクラスの具体例を構成し，ALE 空間における具体例が生成する特異点に，$\mathbb{C}^n$ において構成した自己相似解が現れることを示した．

本研究では，Konno の構成法を (1) 可換性を仮定しない，(2) 直交作用の条件を緩める (広義の直交作用)，の二点において拡張した．さらに，アンビエント空間を Calabi-Yau 多様体とするこれまでの理論を，一般の Riemann 多様体における理論にまで拡張し，(直交とは限らない）一般の Lie 群の対称性を用いて平均曲率流の偏微分方程式を常微分方程式に帰着させる一般論を確立した．以下ではまずこの一般論を示し（第 3 節），次にその解釈のもとに，一般化された直交対称性による Lagrange 平均曲率流の構成法を示していく（第 6 節）．

2　準備

はじめに Calabi-Yau 多様体内の向きづけられた Lagrange 部分多様体に定義される Lagrange 角度の定義と，その性質について述べる．

定義 2.1. Calabi-Yau 多様体とは，組 $(M^{2n}, I, \omega, \Omega)$ であって，次の条件を満たすものをいう*:*

(i)　(M, I, ω) は I を複素構造，ω を Kähler 形式とする Kähler 多様体である，

(ii)　Ω は I に関する正則体積形式である，

(iii)　$\dfrac{\omega^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega \wedge \overline{\Omega}.$

定義 2.2. L を Calabi-Yau 多様体 (M, I, ω, Ω) の向きづけられた Lagrange 部分多様体とするとき，次式で定義される関数 $\theta : L \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を **Lagrange 角度**という:

$$\iota^*\Omega = e^{\sqrt{-1}\theta}\mathrm{vol}_{\iota^* g}.$$

ここに $\iota : L \to M$ は埋め込み，g は (M, I, ω) の Kähler 計量である．

定義 2.3. Calabi-Yau 多様体 (M, I, ω, Ω) の Lagrange 部分多様体 L について，その Lagrange 角度 θ が L 上一定であるとき，L をフェイズ θ の**特殊 Lagrange 部分多様体**であるという．

命題 2.4. (M, I, ω, Ω) を Calabi-Yau 多様体，$\phi : L \to M$ を向きづけられた Lagrange はめ込み，θ を ϕ の Lagrange 角度とする．L の点 p における平均曲率ベクトル $\mathcal{H}(p)$ は次式で表される:

$$\mathcal{H}(p) = I_{\phi(p)}\Big(\phi_{*p}(\mathrm{grad}_{\phi^* g}\theta)_p\Big) \in \mathrm{T}^{\perp}_{\phi(p)}\phi(L).$$

ここに $\mathrm{grad}_{\phi^* g}\theta$ は誘導計量 $\phi^* g$ に関する関数 θ の勾配ベクトル場を表す．

次に群作用と運動量写像について述べる．

H を多様体 M に作用する Lie 群とする．H の元 h による移動を $L_h : M \to M$ で表す．また M の点 p に対し，p を含む軌道および p における固定部分群をそれぞれ $H \cdot p$，H_p と表す．$\mathfrak{h}$ を H の Lie 環とし，$\xi \in \mathfrak{h}$ が生成する M 上の基本ベクトル場を $\xi^{\#}$ で表す：

$$\xi^{\#}_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi)p \quad (p \in M).$$

ここに $\exp(t\xi)$ は ξ に付随する H の 1 パラメーター部分群を表す．H は余随伴作用によって双対 Lie 環 $\mathfrak{h}^*$ に作用する：

$$\mathrm{Ad}^*_h : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*; \quad c \mapsto \mathrm{Ad}^*_h c.$$

ここに Ad^*_h は

$$\langle \mathrm{Ad}^*_h c, \xi\rangle = \langle c, \mathrm{Ad}_h \xi\rangle \quad (\xi \in \mathfrak{h})$$

で定められ，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ の間のペアリングである．余随伴作用に対する $\mathfrak{h}^*$ の不動点集合

$$Z(\mathfrak{h}^*) = \{c \in \mathfrak{h}^* \mid \mathrm{Ad}^*_h c = c, h \in H\}$$

を双対 Lie 環 $\mathfrak{h}^*$ の**中心**と呼ぶ．もし H が可換群ならば $Z(\mathfrak{h}^*) = \mathfrak{h}^*$ となる．

定義 2.5. H をシンプレクティック多様体 (M, ω) に作用する Lie 群とする．**運動量写像**$\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ とは，H 同変でかつ

$$-\mathfrak{i}(\xi^{\#})\omega = d\langle \mu(\cdot), \xi\rangle, \quad (\xi \in \mathfrak{h})$$

を満たすものをいう．ここに $\mathfrak{i}$ は内部積を表す．

シンプレクティック多様体と Lie 群の組 (M, ω, H) が運動量写像を持つとき，H 作用は **Hamilton 作用**と呼ばれる．Hamilton 作用はシンプレクティック形式 ω を保つ．$p \in \mu^{-1}(c)$，$c \in \mathfrak{h}^*$ に対し，p を含む軌道 $H \cdot p$ がアイソトロピックになる，すなわち $\omega\,|_{H\cdot p} \equiv 0$ となるための必要十分条件は，c が $\mathfrak{h}^*$ の中心 $Z(\mathfrak{h}^*)$ に含まれることである．

3 Lie 群の対称性による平均曲率流の構成

この節では不変なはめ込みに関する基礎的な事実について述べ，一般の Riemann 多様体において Lie 群の対称性によって平均曲率流を構成する方法を示す．

M を多様体，H を M に作用する Lie 群，K を H の閉部分群とする．M の部分集合 $\{p \in M \mid H_p = K\}$ を M^K で表す．同様に M の任意の部分多様体 N に対し N^K を定める．M の部分多様体 V で $V \subset M^K$ を満たすものに対し，写像 ϕ_V を $\phi_V : (H/K) \times V \to M; \quad (hK, p) \mapsto hp$ で定める．条件 $V \subset M^K$ により，この写像は well-defined である．

$$\mathrm{T}_{hK}(H/K) = \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h\exp(t\xi)K \;\middle|\; \xi \in \mathfrak{h} \right\}.$$

と表されることに注意して，次の補題を得る．

補題 3.1. 任意の $(hK, p) \in (H/K) \times V$，$\xi \in \mathfrak{h}$，$v \in \mathrm{T}_p V$ に対し，

$$(\phi_V)_{*(hK,p)}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h\exp(t\xi)K, v\right) = (L_h)_{*p}(\xi^{\#}_p + v)$$

が成り立つ．

補題 3.1 を用いて，写像 ϕ_V がはめ込みとなるための必要十分条件を与える次の命題を得る：

命題 3.2. 写像 ϕ_V がはめ込みとなるための必要十分条件は，

$$\xi_p^\# \notin \mathrm{T}_pV\setminus\{0\} \quad (p \in V, \xi \in \mathfrak{h})$$

が成立することである．

次に平均曲率流を変形の観点から定義する．

定義 3.3. 写像 $\phi : \Sigma \to M$ を多様体 Σ から多様体 M へのはめ込みとする．滑らかな写像 $f : \Sigma\times[0,T) \to M; (p,t) \mapsto f_t(p)$ であって，$f_0 = \phi$ なるものが，各時刻 t について $f_t(\cdot) : \Sigma \to M$ もまたはめ込みであるとき，f を ϕ の**変形**と呼ぶ．特に ϕ が包含写像であるとき，f を単に Σ の変形と呼ぶ．

もし ϕ の変形 $f : \Sigma \to M$ が存在すれば，各時刻 t で集合 $f_t(\Sigma)$ ははめ込まれた部分多様体である．

定義 3.4. (M, g) を Riemann 多様体，Σ を多様体，$\phi : \Sigma \to M$ をはめ込みとする．ϕ の**平均曲率流**$F = (F_t)_{t\in[0,T)}$ とは，ϕ の変形であって，次の偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}F(p,t) = \mathcal{H}^t(p) \quad (p \in \Sigma, t \in [0,T))$$

の滑らかな解になっているものをいう．ここに $\mathcal{H}^t(p)$ は点 $p \in \Sigma$ における F_t の平均曲率ベクトルを表す．

Kähler-Einstein 多様体内の平均曲率流は，Lagrange 性を保つことが知られている．すなわち，初期曲面 L_0 を Lagrange 部分多様体とする Kähler-Einstein 多様体内の平均曲率流は，それが滑らかに推移する限りにおいて，発展曲面 L_t も Lagrange 部分多様体であり続ける．このようにして，Käher-Einstein 多様体内に Lagrange 平均曲率流の概念が定められる．

定義 3.5. M を多様体，H を M に作用する Lie 群，K を H の閉部分群，V_0 を $V_0 \subset M^K$ を満たす M の部分多様体，$f : V_0 \times [0,T) \to M^K$ を V_0 の M^K 内の変形とする．各時刻 $t \in [0,T)$ につき，はめ込まれた部分多様体 $V_t := f_t(V_0)$ に対して写像 $\phi_{V_t} : (H/K) \times V_t \to M$ がまたはめ込みであるとき，ϕ_{V_0} の変形 F が次で定まる：

$$F : (H/K) \times V_0 \times [0,T) \to M \quad (hK,p,t) \mapsto hf_t(p) =: F_t(hK,p).$$

F を H 作用による変形 f の**拡大**と呼ぶ．

定義 3.6. (M, g) を Riemann 多様体，H を M に作用する Lie 群，K を H の閉部分群，V_0 を $V_0 \subset M^K$ を満たす M の部分多様体とする．写像 ϕ_V がはめ込みであり，かつ

$$\mathcal{H}(hK,p) = (L_h)_{*p}\mathcal{H}(K,p) \quad (h \in U_K, p \in V), \tag{$*$}$$

を満たすとき，V は**性質**$(*)$ を持つという．ここに $\mathcal{H}$ は ϕ_V の平均曲率ベクトル場を表す．

定義 3.7. (M, g) を Riemann 多様体，H を M に作用する Lie 群，K を H の閉部分群，V_0 を $V_0 \subset M^K$ を満たす M の部分多様体で性質 $(*)$ を持つものとする．$f : V_0 \times [0,T) \to M^K$ を V_0 の M^K 内の変形とする．f が拡大 F を持ち，かつ各時刻 t に対しはめ込まれた部分多様体 $V_t := f_t(V_0)$ もまた性質 $(*)$ を持つとき，変形 f は V_0 の性質 $(*)$ を保つ，という．

定理 3.8. (M, g) を Riemann 多様体，H を M に作用する Lie 群，K を H の閉部分群，V_0 を $V_0 \subset M^K$ を満たす M の部分多様体で性質 $(*)$ を持つものとする．V_0 の M^K 内の変形 $f : V_0 \times [0,T) \to M^K$ で拡大 F を持ち，次の条件を満たすものが存在すると仮定する：

(i) 任意の $t \in [0,T)$，$p \in V_0$ に対し，

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t(K,p) = \mathcal{H}^t(K,p) \quad \text{(restricted MCF condition)}$$

が成り立つ，

(ii) 変形 f は V_0 の性質 $(*)$ を保つ．

ここに，各時刻 $t \in [0,T)$ に対し，$\mathcal{H}^t$ ははめ込み $F_t : (H/K) \times V_0 \to M$ の平均曲率ベクトルを表す．このとき写像族 $(F_t)_{t\in[0,T)}$ は ϕ_{V_0} の平均曲率流を与える．

条件 (i) の式は，V_t 上に制限された F_t の平均曲率流の偏微分方程式を表すものであるから，この意味で「制限された平均曲率流 (mean curvature flow) の条件」“restricted MCF condition” と呼んでいる．restricted MCF condition は元の条件式よりもいくらか限定されたものであるとはいえ，一般には偏微分方程式のままである．次の系はこれを常微分方程式に落とす一つの方法を与える．

系 3.9. (M,g) を Riemann 多様体，H を M に作用する Lie 群，K を H の閉部分群，V_0 を $V_0 \subset M^K$ を満たす M の部分多様体で性質 $(*)$ を持つものとする．以下の条件を満たす M^K に沿うベクトル場 A が与えられたと仮定する：

(i.a) A は V_0 の M^K 内の変形 $f : V_0 \times [0,T) \to M^K$ を生成し，f は拡大 F を持つ，すなわち次がなりたつ：

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(K,p) = A_{f_t(p)} \quad (p \in V_0, t \in [0,T)),$$

(i.b)

$$\mathcal{H}^t(K,p) = A_{f_t(p)} \quad (p \in V_0, t \in [0,T)),$$

(ii) 変形 f は V_0 の性質 $(*)$ を保つ．

このとき写像族 $(F_t)_{t\in[0,T)}$ は ϕ_{V_0} の平均曲率流を与える．

注意 3.10. 部分多様体 $V_0 \subset M^K$ に対し，もし条件 (i.b) を満たすベクトル場 A が得られたとすると，条件 (i.a) は常微分方程式である．条件 (i.b) は平均曲率流によって生じる平均曲率ベクトルの分布が，あらかじめベクトル場の形で分かっている，という状況を意味する．例えば自己交差を持つ部分多様体や，ダンベル曲面のように各時刻では自己交差を持たずとも，過去の自分自身と現在の自分自身が自己交差を持つような部分多様体は，条件 (i.b) を満たさないことが分かる．

4 運動量写像による Lagrange はめ込みの構成

この節では次節以降の準備として，シンプレクティック多様体において運動量写像を用いて Lagrange はめ込みを構成する方法を示す．

命題 4.1. (M,ω) をシンプレクティック多様体，H を M に作用する Lie 群で運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を H の閉部分群，V_c を M の部分多様体で $V_c \subset M^K$ を満たすものとする．もし，条件

(i) 写像 ϕ_{V_c} ははめ込みである，

(ii) V_c はアイソトロピックである，

(iii) ある $c \in Z(\mathfrak{h}^*)$ が存在して，$V_c \subset \mu^{-1}(c)$ が成立する (moment map condition),

が成り立つならば，写像 ϕ_{V_c} はアイソトロピックなはめ込みである．逆に，はめ込み ϕ_{V_c} がアイソトロピックであり，かつ ϕ_{V_c} の像 $\phi_{\mathrm{V_c}}$ が連結ならば，上の条件 *(i),(ii),(iii)* が成り立つ．

系 4.2. 命題 4.1 の条件に加え，さらに

$$\dim H/K + \dim V_c = n$$

が成り立つならば，写像 ϕ_{V_c} は Lagrange はめ込みである．

5 対称性を持つ Lagrange 角度

この節では写像 ϕ_V が向きづけられた Calabi-Yau 多様体 M への Lagrange はめ込みであるとき，ある条件下でその Lagrange 角度が Lie 群の作用に関する対称性を持つことを示す．

M を多様体，H を M に作用する Lie 群，$\mathfrak{h}$ を H の Lie 環，K を H の閉部分群，$\mathfrak{k}$ を K の Lie 環，p を M^K の点とする．このとき，Lie 群および等質空間の一般論より，次の二つの写像は線型同型写像である：

$$\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \to \mathrm{T}_K(H/K); \quad [\xi] \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi)K,$$
$$\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \to \mathrm{T}_p(H \cdot p); \quad [\xi] \mapsto \xi_p^{\#}.$$

よって，写像 $\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \to \mathrm{T}_p(H\cdot p); [\xi] \mapsto [\xi]_p^{\#} := \xi_p^{\#}$ によって記号 $[\xi]_p^{\#}$ を，写像 $\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \to \mathrm{T}_K(H/K); [\xi] \mapsto \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(t[\xi])K := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(t\xi)K$ によって記号 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(t[\xi])K$ を，それぞれ well-defined に定めることができる．

命題 5.1. (M,g) を Riemann 多様体，H を M に作用する Lie 群，K を H の閉部分群，p を M^K の点，b を $\mathfrak{h}^*$ の元で $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Ker}\, b$ を満たすものとする．このとき，

$$\langle b, [\eta] \rangle = g_p\big([\beta(p)]_p^{\#}, \eta_p^{\#}\big)$$

によって写像 $[\beta(\cdot)] : M^K \to \mathfrak{h}/\mathfrak{k}; p \mapsto [\beta(p)]$ が定まる．

定義 5.2. 命題 5.1 の条件下，M^K に沿うベクトル場 $[\beta(\cdot)]^{\#}$ を**コベクトル b が g に関し生成するベクトル場**と呼ぶ．さらに，M 上に概複素構造 I が存在するとき，M^K に沿うベクトル場 $I[\beta(\cdot)]^{\#}$ を**コベクトル b が (g,I) に関し生成するベクトル場**と呼ぶ．

命題 5.3. (M,I,ω,g) を Kähler 多様体，H を M に作用する Lie 群で運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を H の閉部分群，p を M^K の点，b を $\mathfrak{h}$ の元で $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Ker}\, b$ を満たすものとする．このとき，任意の $p \in M^K$ に対し，

$$(d\mu)_p I_p [\beta(p)]_p^{\#} = -b$$

が成り立つ．

系 5.4. 命題 5.3 の条件下，$\mu(p) = c_0$ とする．$I[\beta(\cdot)]^{\#}$ が生成する初期条件 $\gamma(0) = p$ の積分曲線 $\gamma_p : [0,T) \to M^K$ が存在すると仮定する．このとき，

$$\mu(\gamma_p(t)) = c_t, \quad c_t := c_0 - tb$$

が成り立つ．

次の命題は Lie 群作用による Calabi-Yau 構造の変換公式を与える．

命題 5.5. (M,I,ω,Ω) を連結な Calabi-Yau 多様体，H を ω と I を保って M に作用する連結 Lie 群とする．このとき，ある $a_H \in \mathfrak{h}^*$ が存在し，任意の $h \in H$ に対し，

$$L_h^* \Omega = e^{\sqrt{-1}\langle a_H, \eta_1 + \cdots + \eta_l \rangle} \Omega$$

が成り立つ．ここに，$\eta_1, \cdots, \eta_l$ は $h = \exp \eta_1 \cdots \exp \eta_l$ を満たす $\mathfrak{h}$ の元である．

命題 5.6. (M,I,ω,Ω) を $2n$ 次元連結 Calabi-Yau 多様体，H を ω と I を保って M に作用する連結 Lie 群で運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を H の閉部分群で H/K が向きづけ可能であるもの，V_c を向きづけ可能な M の部分多様体で $V_c \subset M^K$ を満たし，さらに次の条件を満たすものとする：

(i) 写像 ϕ_{V_c} ははめ込みである，

(ii) V_c はアイソトロピックである，

(iii) ある $c \in Z(\mathfrak{h}^*)$ が存在して $V_c \subset \mu^{-1}(c)$ が成り立つ，(moment map condition),

(iv) $\dim(H/K) + \dim V_c = n$.

このとき，写像 ϕ_{V_c} は向きづけ可能な Lagrange はめ込みであり，θ_c を ϕ_{V_c} の Lagrange 角度とすると，

$$\theta_c(hK, p) = \theta_c(K, p) + \langle a_H, \eta_1, \cdots, \eta_l \rangle \quad (hK \in H/K, p \in V_c)$$

が成り立つ．ここに a_H は命題 5.5 で定まる $\mathfrak{h}^*$ の元，$h = \exp \eta_1 \cdots \exp \eta_l$ である．

系 5.7. 命題 5.6 の条件下，K 作用は Calabi-Yau 構造 Ω を保つ：

$$L_k^*\Omega = \Omega \quad (k \in K).$$

系 5.7 により，$\mathfrak{k} \subset \mathrm{Ker}\ a_H$ であるから，$\mathfrak{h}^*$ の元である a_H を $(\mathfrak{h}/\mathfrak{k})^*$ の元とみなすことができる．よってコベクトル a_H が (g, I) に関し生成する M^K に沿うベクトル場 $I[\alpha_H(\cdot)]^\#$ が定まる．命題 2.4 より，次の命題を得る．

命題 5.8. 命題 *5.6* の条件下，任意の $(hK, p) \in (H/K) \times V_c$ に対し，

$$\mathcal{H}^c(hK,p) = (L_h)_{*p} I_p \Big\{ [\alpha_H(p)]_p^\# + \Big(\mathrm{grad}_{\phi_{V_c}{}^* g}\theta_c(K,\cdot\,)\Big)_p \Big\}$$

が成り立つ．ここに $\mathcal{H}^c$ ははめ込み ϕ_{V_c} の平均曲率ベクトル場を表す．特に V_c は性質 $(*)$ を持つ．

6 Lagrange 平均曲率流の構成

この節では，系 3.9 を応用して，Lie 群の直交対称性を用い，Calabi-Yau 多様体において Lagrange 平均曲率流を構成する方法を示す．

命題 6.1. (M, I, ω, Ω) を $2n$ 次元連結 Calabi-Yau 多様体，H を ω と I を保って M に作用する連結 Lie 群で運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を H の閉部分群で H/K が向きづけ可能であるもの，L を M の向きづけられた Lagrange 部分多様体，θ を L の Lagrange 角度，V_c を M の部分多様体で $V_c \subset L^K$ を満たすものとする．次の条件を仮定する：

(i) 任意の $p \in V_c$，$\xi \in \mathfrak{h}$ に対し次が成り立つ：

(i.a) $\xi_p^\# \in \mathrm{T}_p^\perp L \oplus \mathrm{T}_p V_c$,

(i.b) $\xi_p^\# \notin \mathrm{T}_p V_c \backslash \{0\}$ (generalized perpendicular condition),

(ii) ある $c \in Z(\mathfrak{h}^*)$ が存在して $V_c \subset \mu^{-1}(c)$ が成り立つ，(moment map condition), and

(iii) $\dim(H/K) + \dim V_c = n$.

このとき，V_c には標準的 na 向きが定まり，写像 ϕ_{V_c} は向きづけ可能な Lagrange はめ込みとなる．さらに，ϕ_{V_c} の Lagrange 角度を θ_c とおくと，次が成り立つ：

$$\theta_c(hK, p) = \theta(p) - \frac{\pi}{2}\dim(H/K) + \langle a_H, \eta_1, \cdots, \eta_l \rangle, \tag{6,1}$$

ここに a_H は命題 5.5 で定まる $\mathfrak{h}^*$ の元，$h = \exp\eta_1 \cdots \exp\eta_l$ である．

定理 6.2. (M, I, ω, Ω) を $2n$ 次元連結 Calabi-Yau 多様体，H を ω と I を保って M に作用する連結 Lie 群で運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を H の閉部分群で H/K が向きづけ可能であるもの，L を M の向きづけられた Lagrange 部分多様体，θ を L の Lagrange 角度，V_{c_0} を M の部分多様体で $V_{c_0} \subset L^K$ を満たすものとする．次の条件を仮定する：

(i) 任意の $p \in V_{c_0}$，$\xi \in \mathfrak{h}$ に対し次が成り立つ：

(i.a) $\xi_p^\# \in \mathrm{T}_p^\perp L \oplus \mathrm{T}_p V_{c_0}$,

(i.b) $\xi_p^\# \notin \mathrm{T}_p V_{c_0} \backslash \{0\}$ (generalized perpendicular condition),

(ii) ある $c_0 \in Z(\mathfrak{h}^*)$ が存在して $V_{c_0} \subset \mu^{-1}(c_0)$ が成り立つ，(moment map condition), and

(iii) $\dim(H/K) + \dim V_{c_0} = n$.

M^K に沿うベクトル場 $I[\alpha_H(\cdot)]^\#$ が V_{c_0} の L^K 内の変形 $f : V_{c_0} \times [0, T) \to L^K$ を生成し，さらに f が拡大 F を持つと仮定する：

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(K, p) = I_{f_t(p)}[\alpha_H(f_t(p))]^\#_{f_t(p)} \quad (p \in V_{c_0}, t \in [0, T)).$$

このとき各時刻 $t \in [0, T)$ につき，はめ込まれた部分多様体 $f_t(V_{c_0})$ は，系 5.4 により $f_t(V_{c_0}) \subset \mu^{-1}(c_t)$ $(c_t := c_0 - t a_H)$ を満たす．そこで $V_{c_t} := f_t(V_{c_0})$ とおく．各時刻 $t \in [0, T)$ に対し，次の条件を仮定する：

(iv) $c_t \in Z(\mathfrak{h}^*)$,

(v) V_{c_t} 上で generalized perpendicular condition が成立する．

命題 6.1 により，$\phi_{V_{c_t}}$ は向きづけ可能な Lagrange はめ込みである．$\phi_{V_{c_t}}$ の Lagrange 角度を θ_{c_t} とおく．各 $t \in [0,T)$ に対し次を仮定する：

(vi) θ_{c_t} は V_{c_t} 上一定である．

このとき，写像族 $(F_t)_{t\in[0,T)}$ は $\phi_{V_{c_0}}$ の Lagrange 平均曲率流である．ここに，$\mathcal{H}^t$ ははめ込み F_t の平均曲率ベクトル場を表す．

(vi) の条件に関し，例えば L が特殊 Lagrange 部分多様体であれば，(6,1) 式より条件が (vi) が満たされることが分かる．

References

[1] D. D. Joyce, *Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries*, Duke Math. J. **115** (2002), no. 1, 1–51.

[2] H. Konno, *Lagrangian mean curvature flows and moment maps*, to appear in Geom Dedicata (2018), DOI: 10.1007/s10711-018-0331-8.

[3] A. Ochiai, *A construction of special Lagrangian submanifolds by generalized perpendicular symmetries*, to appear in Tokyo J. Math.

[4] H. Yamamoto, *Weighted Hamiltonian stationary Lagrangian submanifolds and generalized Lagrangian mean curvature flows in toric almost Calabi-Yau manifolds*, Tohoku Math. J. **68** (2016), 329–347.