擬Riemann空間形内の全臍的部分多様体

佐藤　雄一郎　(首都大学東京)*

序

指数 p の m 次元**擬Euclid空間**を

$$\mathbb{E}^m_p := \left(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle_p = -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{j=p+1}^{m} dx_j^2\right)$$

で定める．但し，$(x_1, \cdots, x_m)$ は $\mathbb{R}^m$ の標準座標である．擬Euclid空間は平坦(一定断面曲率0)である．定数 $r > 0$ に対し，擬Euclid空間内の超曲面

$$\mathbb{S}^m_p(r^2) := \left\{x \in \mathbb{E}^{m+1}_p \mid \langle x, x\rangle_p = \frac{1}{r^2}\right\},\ \mathbb{H}^m_p(-r^2) := \left\{x \in \mathbb{E}^{m+1}_{p+1} \mid \langle x, x\rangle_{p+1} = -\frac{1}{r^2}\right\}.$$

を定め，擬Euclid空間からの誘導計量を導入する．これらは，それぞれ一定断面曲率 $r^2, -r^2$ を持ち，測地的完備であり，それぞれ指数 p の m 次元**擬球面**，**擬双曲空間**という．擬Euclid空間 $\mathbb{E}^m_p$ を含めたものを総称して，**擬Riemann空間形**と呼ぶこともある．$p = 0$ のとき，単にRiemann空間形である．

ここで，いくつか記号の準備をする．$\mathbb{M}^N_p = \mathbb{M}^N_p(\epsilon)$ を N 次元擬Riemann空間形とする．ここで $\epsilon \in \{0, \pm 1\}$ である．すなわち，$\mathbb{M}^N_p(0) = \mathbb{E}^N_p, \mathbb{M}^N_p(1) = \mathbb{S}^N_p(1), \mathbb{M}^N_p(-1) = \mathbb{H}^N_p(-1)$ である．また，(M^m_s, g) を指数 s の m 次元擬Riemann多様体，$\phi : M^m_s \to \mathbb{M}^{m+n}_p$ を等長はめ込みとする．h, H でそれぞれ ϕ による M 上の第二基本形式，平均曲率ベクトル場を表す．

等長はめ込み ϕ に対し，**全測地的**であるとは，第二基本形式が恒等的に消えることである．すなわち，$h = 0$ を満たすことである．**極小**(あるいは，**平均曲率零**)であるとは，第二基本形式のトレースが恒等的に消えることである．すなわち，$H = \frac{1}{m}\mathrm{trace}_g h = 0$ を満たすことである．**全臍的**であるとは，第二基本形式のトレースレス部分が恒等的に消えることである．すなわち，任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対し，$h(X, Y) = g(X, Y)H$ を満たすことである．定義より，全測地的であることの必要十分条件は， 極小かつ全臍的であることである．比較のため，良く知られたRiemann空間形内の全臍的部分多様体について復習する．

定理 1. $\phi : M^m \to \mathbb{E}^n$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．

- 全測地的 $\mathbb{E}^m \subset \mathbb{E}^n$: 部分空間，
- $\mathbb{S}^m(r^2) \hookrightarrow \mathbb{E}^{m+1}$: 超球面 $(r > 0)$.

定理 2. $\phi : M^m \to \mathbb{S}^n(1)$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．

- 全測地的 $\mathbb{S}^m(1) \subset \mathbb{S}^n(1)$: 大円，
- $\mathbb{S}^m(r^{-2}) \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$: 小円 $(0 < r < 1)$.

部分多様体論・湯沢 2019 講演記録.

* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢1-1　首都大学東京 理学研究科
e-mail: satou-yuuichirou@ed.tmu.ac.jp

定理 3. $\phi : M^m \to \mathbb{H}^n(-1)$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．

- 全測地的 $\mathbb{H}^m(-1) \subset \mathbb{H}^n(-1)$：部分空間,
- $\mathbb{H}^m(-r^{-2}) \to \mathbb{H}^{m+1}(-1)$：双曲型 $(r > 1)$,
- $\mathbb{S}^m(r^{-2}) \to \mathbb{H}^{m+1}(-1)$：楕円型 $(r > 0)$,
- $\mathbb{E}^m \to \mathbb{H}^{m+1}(-1)$：ホロ球面.

いずれも余次元を 1 に落とせることが分かる．さて，次に平坦な擬 Riemann 空間形内の全臍的部分多様体の分類結果を紹介する．

定理 4 (M. A. Magid [13], S. S. Ahn, D. S. Kim, Y. H. Kim [1]). $\phi : M_s^m \to \mathbb{E}_p^n$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．

(1) 全測地的擬 Euclid 部分空間 $\mathbb{E}_s^m \subset \mathbb{E}_p^n$；

(2) 擬球面 $\mathbb{S}_s^m(r^2) \hookrightarrow \mathbb{E}_s^{m+1}$ $(r > 0)$；

(3) 擬双曲空間 $\mathbb{H}_s^m(-r^2) \hookrightarrow \mathbb{E}_{s+1}^{m+1}$ $(r > 0)$；

(4) 次で与えられる平坦全臍的部分多様体 $\mathbb{U}_s^m$

$$\mathbb{E}_s^m \to \mathbb{E}_{s+1}^{m+2}\ ;\ x \mapsto (\langle x, x\rangle_s, x, \langle x, x\rangle_s).$$

更に，M の平均曲率ベクトル場 H は上からそれぞれ次の性質を持つ．

$$H = 0,\ H：\text{空間的},\ H：\text{時間的},\ H：\text{光的}.$$

最後の例は，$\mathbb{E}_p^n$ 内の余次元 2，余指数 1 で，半単純でない対称部分多様体であり，更に，擬 Euclid 空間内のホロ球面と呼ぶべきものである．

ここで，非平坦な擬 Riemann 空間形の場合の先行研究を紹介する．

事実 (B. Y. Chen, [7]). $\phi : M_s^m \to \mathbb{S}_p^n(1)$ を全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である．

- $\mathbb{S}_s^m(r^{-2}) \to \mathbb{S}_s^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto (x, \sqrt{1-r^2})$ $(0 < r \le 1)$,
- $\mathbb{S}_s^m(r^{-2}) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto (\sqrt{r^2-1}, x)$ $(r \ge 1)$,
- $\mathbb{H}_s^m(-r^{-2}) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)\ ;\ x \mapsto (x, \sqrt{1+r^2})$ $(r > 0)$,
- $\mathbb{E}_s^m \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)\ ;\ x \mapsto \left(r\langle x, x\rangle_s + rb - \dfrac{r}{4}, rx, \sqrt{1+br^2}, r\langle x, x\rangle_s - rb + \dfrac{r}{4}\right)$
  $(r > 0, br^2 \ge -1)$,
- $\mathbb{E}_s^m \to \mathbb{S}_{s+2}^{m+2}(1)\ ;\ x \mapsto \left(r\langle x, x\rangle_s + rb - \dfrac{r}{4}, \sqrt{br^2-1}, rx, r\langle x, x\rangle_s + rb + \dfrac{r}{4}\right)$
  $(r > 0, br^2 \ge 1)$.

この擬球面 $\mathbb{S}_p^n(1)$ 内の全臍的部分多様体の分類は，不完全である．実際，例えば次の例が含まれていない．

$$\psi : \mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)\ ;\ x \mapsto (1, x, 1)$$

全測地的なものに合同に見えるが，そうはならない．

実際，ψ の平均曲率ベクトル場を求めると，

$$H = (1, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{E}_{s+1}^{m+3}$$

となり，光的になることが分かる（つまり全測地的でない）．

以上を踏まえ，非平坦な擬Riemann空間形内の全臍的部分多様体の完全な分類をしたい．より厳密には，充満な全臍的部分多様体の合同類の分類をしたい．

等長はめ込み$\phi : M_s^m \to \mathbb{M}_p^n(\varepsilon)$が**充満**であるとは，$\mathbb{M}_p^N(\epsilon)$内の任意の非退化な全測地的部分多様体の中にも含まれないことをいう．

二つの擬Riemann多様体間の等長はめ込み$f_1, f_2 : M_s^m \to \bar{M}_p^n$が**合同**であるとは，ある$\bar{M}$の等長変換$g$が存在して，$f_2 = g \circ f_1$を満たすことをいう．

主結果

定理 5 (S.). $\phi : M_s^m \to \mathbb{S}_p^n(1)$を充満な全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である：

(1) $\mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_s^{m+1}(1)$; $x \mapsto (x, 0)$ (全測地的),

(2) $\mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)$; $x \mapsto (0, x)$ (全測地的),

(3) $\mathbb{S}_s^m(r^{-2}) \to \mathbb{S}_s^{m+1}(1)$; $x \mapsto (x, \sqrt{1-r^2})$ $(0 < r < 1)$,

(4) $\mathbb{S}_s^m(r^{-2}) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)$; $x \mapsto (\sqrt{r^2-1}, x)$ $(r > 1)$,

(5) $\mathbb{S}_s^m(1) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1)$; $x \mapsto (1, x, 1)$,

(6) $\mathbb{H}_s^m(-r^{-2}) \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)$; $x \mapsto (x, \sqrt{1+r^2})$ $(r > 0)$,

(7) $\mathbb{E}_s^m \to \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1)$; $x \mapsto \left(\langle x, x\rangle_s - \dfrac{3}{4}, x, \langle x, x\rangle_s - \dfrac{5}{4}\right)$.

更に，M_s^mが測地的完備であれば，上記のいずれか一つに大域的に一致する．

定理 6 (S.). $\phi : M_s^m \to \mathbb{H}_p^n(-1)$を充満な全臍的等長はめ込みとする．このとき，次のいずれかの一つの開部分に合同である：

(1) $\mathbb{H}_s^m(-1) \to \mathbb{H}_s^{m+1}(-1)$; $x \mapsto (x, 0)$ (全測地的),

(2) $\mathbb{H}_s^m(-1) \to \mathbb{H}_{s+1}^{m+1}(-1)$; $x \mapsto (0, x)$ (全測地的),

(3) $\mathbb{H}_s^m(-r^{-2}) \to \mathbb{H}_{s+1}^{m+1}(-1)$; $x \mapsto (\sqrt{1-r^2}, x)$ $(0 < r < 1)$,

(4) $\mathbb{H}_s^m(-r^{-2}) \to \mathbb{H}_s^{m+1}(-1)$; $x \mapsto (x, \sqrt{r^2-1})$ $(r > 1)$,

(5) $\mathbb{H}_s^m(-1) \to \mathbb{H}_{s+1}^{m+2}(-1)$; $x \mapsto (1, x, 1)$,

(6) $\mathbb{S}_s^m(r^{-2}) \to \mathbb{H}_s^{m+1}(-1)$; $x \mapsto (\sqrt{1+r^2}, x)$ $(r > 0)$,

(7) $\mathbb{E}_s^m \to \mathbb{H}_s^{m+1}(-1)$; $x \mapsto \left(\langle x, x\rangle_s + \dfrac{5}{4}, x, \langle x, x\rangle_s + \dfrac{3}{4}\right)$.

更に，M_s^mが測地的完備であれば，上記のいずれか一つに大域的に一致する．

定理5，6において，(5)はどちらも$\mathbb{S}_p^n(1), \mathbb{H}_p^n(-1)$内の余次元2，余指数1である．また，(7)の例から$\mathbb{S}_p^n(1), \mathbb{H}_p^n(-1)$内のホロ球面と呼ぶべきものの合同類は唯一つであることも読み取れる．

補題 7 (Erbacher–Magid Reduction Theorem, [11], [13]). $\phi : M_s^m \to \mathbb{E}_p^n$を等長はめ込みとする．各点$x \in M_s^m$に対し，次を定義する．

$$N^0(x) := \{\xi \in T_x^{\perp}M \mid A_\xi = 0\}.$$

また，このとき第一法空間を$N^0(x)$の直交(補)空間として，定義する．すなわち，

$$N^1(x) := (N^0(x))^{\perp} = \{\nu \in T_x^{\perp}M \mid \bar{g}(\nu, \xi) = 0,\ \xi \in N^0(x)\}$$

で定められる．このとき，$N^1 = \bigcup_{x \in M} N^1(x)$が法束の部分束であり，法接続に関して平行であるとすると，完備な$(m+k)$次元の(光的かもしれない)全測地的部分多様体$E^* \subset \mathbb{E}_p^n$が存在して，$\phi(M) \subset E^*$を満たす．ここで，$k = \mathrm{rank} N^1$である．

補題 8 (B. Y. Chen, [7])**.** $\phi : M_s^m \to \mathbb{S}_p^n(1)$ (resp. $\mathbb{H}_p^n(1)$) を等長はめ込み，$\iota : \mathbb{S}_p^n(1) \to \mathbb{E}_p^{n+1}$ (resp. $\mathbb{E}_{p+1}^{n+1}$) を包含写像とする．このとき，合成写像 $f = \iota \circ \phi$ を考えると，次が成立する：

(1) ϕ が平行平均曲率ベクトル場を持つことの必要十分条件は，f が平行平均曲率ベクトル場を持つことである；

(2) ϕ が平行であることの必要十分条件は，f が平行であることである；

(3) ϕ が全臍的であることの必要十分条件は，f が全臍的であることである．

以下は，主結果である定理5，6の証明のスケッチである．

$\phi : M_s^m \to \mathbb{S}_p^n(1)$ が全臍的等長はめ込みと仮定する．ϕ を包含写像 $\iota : \mathbb{S}_p^n(1) \hookrightarrow \mathbb{E}_p^{n+1}$ を用いて，$\mathbb{E}_p^{n+1}$ への等長はめ込みとみなす．このとき，補題8より，$f := \iota \circ \phi : M_s^m \to \mathbb{E}_p^{n+1}$ は全臍的等長はめ込みになることが分かる．Erbacher–Magid Reduction Theorem より，ある $(m+1)$ 次元全測地的部分多様体 $E^* \subset \mathbb{E}_p^{n+1}$ が存在して，$f(M) \subset E^*$ となる．従って，$\phi(M) \subset \mathbb{S}_p^n(1) \cap E^*$ であるため，E^* の場合分けをして，各個撃破する．$\mathbb{E}_p^{n+1}$ の等長変換により，E^* は $\mathbb{E}_s^{m+1}, \mathbb{E}_{s+1}^{m+1}, \Pi_{s,m-s,1}^m, \Pi_{s+1,m-s-1,1}^m$ のいずれかに一致する．最後に E^* の平行移動を考慮し，直接 $\mathbb{S}_p^n(1)$ との共通部分を計算することで，主結果の分類を得る．以下は，E^* がなり得る候補である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E}_s^{m+1} + v_S \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{E}_s^{m+2} \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
\mathbb{E}_s^{m+1} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \mathbb{E}_s^{m+1} + v_T \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{E}_{s+1}^{m+2} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{E}_p^{n+1}, \\
 & \mathbb{E}_s^{m+1} + v_L \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{E}_{s+1}^{m+3} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \Pi_{s,m-s,1}^{m+1} + v_S \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{E}_{s+1}^{m+3} \arrow[ddr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
 & \Pi_{s,m-s,1}^{m+1} + v_T \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{E}_{s+2}^{m+3} \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
\Pi_{s,m-s,1}^{m+1} \arrow[uur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ddr, phantom, sloped, "\subset"] & & & \mathbb{E}_p^{n+1}. \\
 & \Pi_{s,m-s,1}^{m+1} + v_L \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{E}_{s+2}^{m+4} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & \\
 & \Pi_{s,m-s,1}^{m+1} + N \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{E}_{s+1}^{m+2} \arrow[uur, phantom, sloped, "\subset"] &
\end{tikzcd}
$$

ここで，v_S, v_T, v_L はそれぞれ空間的，時間的，光的ベクトルであり，N は次で与えられる．

$$N := \frac{1}{2}(-1, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{E}_p^{n+1}.$$

擬双曲空間の場合も議論は平行である．

注意 9. $\Pi_{s,t,r}^m$ は，$\mathbb{E}_p^{m+n}$ 内の符号数 (s,t,r) の標準 r-光的 m-平面であり，次で定義される．

$$\Pi_{s,t,r}^m := \{(\underbrace{z_1, \cdots, z_r, x_1, \cdots, x_s, 0, \cdots, 0}_{p}, \underbrace{y_1, \cdots, y_t, z_1, \cdots, z_r, 0, \cdots, 0}_{m+n-p}) \in \mathbb{E}_p^{m+n}\}.$$

特に，$\Pi_{s,t,r}^m$ は，$\mathbb{E}_p^{m+n}$ 内の全測地的光的部分多様体である [5].

応用

$M_s^m, \bar{M}_p^n$ を擬 Riemann 多様体，次の写像空間を定義する．

$$\{\phi : M \to \bar{M} \mid \phi : \text{等長はめ込み}\} \ (\subset C^\infty(M, \bar{M})).$$

$\mathcal{M}(M, \bar{M})$ を $\bar{M}_p^n$ の等長変換群で割った商空間，すなわち，合同類全体のなす空間とする．

$\mathcal{M}(M, \bar{M})$ を等長はめ込み $\phi : M \to \bar{M}$ の**モジュライ空間**と呼ぶ．また，ϕ が全臍的の場合のモジュライ空間を $\tilde{\mathcal{M}}(M, \bar{M}) (\subset \mathcal{M}(M, \bar{M}))$ で表すことにする．

定理 10 (S.)**.** 上記の準備の下，次が成立する．

$$\tilde{\mathcal{M}}\left(\mathbb{M}_s^m(\varepsilon), \mathbb{M}_p^n(\varepsilon)\right) \overset{\text{homeo.}}{\cong}$$
$$\begin{cases} \{\text{pt.}\} & (n = m+1, s \le p \le s+1, \text{or } n = m+2, p = s), \\ (X, \mathcal{O}_X) & (n \ge m+2,\ p \ge s+1) \end{cases}$$

ここで，$\varepsilon \in \{0, \pm 1\}$，$(X, \mathcal{O}_X)$ は 2 点集合 $X = \{g, u\}$ に位相構造 $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, \{u\}, \{g, u\}\}$ を定めた位相空間で，連結な非 Hausdorff 空間であることに注意する．

系 11 (S.)**.** $n \ge m+2,\ p \ge s+1, \varepsilon \in \{0, \pm 1\}$ とする．等長はめ込み $\phi : \mathbb{M}_s^m(\varepsilon) \to \mathbb{M}_p^n(\varepsilon)$ のモジュライ空間 $\mathcal{M}(\mathbb{M}_s^m(\varepsilon), \mathbb{M}_p^n(\varepsilon))$ は非 Hausdorff 空間である．

これは，空間形の間の等長はめ込みの完全な分類が，余次元や余指数が高い場合に困難を極める可能性を示唆する．

最後に，平行部分多様体についての応用を一つ与える．$\phi : M_s^m \to \bar{M}_p^n$ を擬 Riemann 多様体間の等長はめ込みとする．ϕ が**平行**であるとは，その第二基本形式 h が平行であることをいう．

外空間 $\bar{M}$ が擬 Riemann 空間形 $\mathbb{M}_p^n(\varepsilon)$ のとき，M が全臍的ならば，その平均曲率ベクトル場が平行になるので，M は平行である．更に，M が平行部分多様体であることと局所対称部分多様体の概念は等価であり，特に，M が完備平行部分多様体であることと，対称部分多様体 (外的対称空間) であることは同値である．従って，定理 5，6 で得られた部分多様体はすべて対称部分多様体である．

等長はめ込み $\phi : M_s^m \to \mathbb{M}_p^n(\varepsilon)$ が**実質的**であるとは，擬 Riemann 空間形 $\mathbb{M}_p^n(\varepsilon)$ 内の任意の非退化な全臍的部分多様体にも含まれないことをいう．従って，定義より，ϕ が実質的であれば，充満である．

Ferus，竹内によって，Riemann 空間形内の平行部分多様体は完全に分類されている [12, 15]．

命題 12 (S.)**.** M_s^m を既約な擬 Riemann 対称 R 空間とする．すなわち，擬 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道とする [3, 14]．$\varphi : M_s^m \to \mathbb{S}_p^n(1)$ を標準埋め込み，$\psi : \mathbb{S}_p^n(1) \to \mathbb{S}_{p+1}^{n+2}(1)$ を $x \mapsto (1, x, 1)$ とする．このとき，

$$\chi := \psi \circ \varphi : M_s^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{n+2}(1)$$

は実質的でないが，充満であり，$\mathbb{S}_{p+1}^{n+2}(1)$ 内の完備平行部分多様体である．更に，$\varphi(M_s^m)$ は，$\mathbb{S}_p^n(1)$ 内の平均曲率零部分多様体であるが，$\chi(M_s^m)$ は，$\mathbb{S}_{p+1}^{n+2}(1)$ 内の平均曲率零部分多様体ではない．しかしながら，平均曲率ベクトル場は平行であり，かつ光的である (marginally trapped 部分多様体)．

この現象は，Riemann 幾何の場合では起き得ない．実際，既約な対称 R 空間の球面への充満で，平行な等長はめ込みは，標準埋め込みに合同であるといった剛性が成立するため，常に極小部分多様体になる．

最後に，B. Y. Chen らは，擬 Riemann 空間形内の空間的，時間的な平行曲面を明示的にすべて分類した．平行部分多様体の良いサーベイである [6] を参照してほしい．[7] において，彼は次のようなコメントを残している．

"The explicit classifications of parallel pseudo-Riemannian submanifolds in indefinite real space forms are much more complicated than parallel submanifolds in real space forms."

実際，$\mathbb{S}^4_2(1)$ 内に 24 個の時間的平行曲面の族，$\mathbb{H}^4_2(-1)$ 内に 53 個の時間的平行曲面の族が存在することを示している [8, 9]．しかしながら，その多くの平行曲面は，充満ではあるが，実質的ではない．従って，完備な平行部部分多様体であって，実質的なものの明示的な分類ならば，実行可能なのかもしれない．

参考文献

[1] S. S. Ahn, D. S. Kim and Y. H. Kim, *Totally umbilical Lorentzian submanifolds*, J. Korean Math. Soc. **33** (1996), 507–512.

[2] H. Anciaux, *Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry*, World Scientific (2011).

[3] C. Blomstrom, *Symmetric immersions in pseudo-Riemannian space forms*, in: Global Differential Geometry and Global Analysis, in: Lecture Notes in Math., vol. 1156, Springer, Berlin, 1985, pp. 30–45.

[4] J. Berndt, S. Console and C. Olmos, *Submanifolds and holonomy*, CHAPMAN and HALL/CRC Research Notes in Mathematics 434 (2003).

[5] A. Bejancu, K. L. Duggal, *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer Academic Publishers (1996).

[6] B. Y. Chen, *A comprehensive survey on parallel submanifolds in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds*, arXiv:1910.08807.

[7] B. Y. Chen, *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*, World Scientific, (2011).

[8] B. Y. Chen, *Complete classification of parallel Lorentz surfaces in four-dimensional neutral pseudosphere*, J. Math. Phys. **51** (2010), 083518.

[9] B. Y. Chen, *Complete classification of parallel Lorentz surfaces in neutral pseudo hyperbolic* 4*-space*, Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), 706–734.

[10] K. L. Duggal and D. H. Jin, *Totally umbilical lightlike submanifolds*, Kodai Math. J. **26** (2003), no. 1, 49–68.

[11] J. Erbacher, *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J. Differential Geom. **10**, 253–276, (1975).

[12] D. Ferus, *Immersions with parallel second fundamental form*, Math. Z. **140** (1974), 87–93.

[13] M. A. Magid, *Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms*, Tsukuba J. Math. **8** (1982), 31–54.

[14] H. Naitoh, *Pseudo-Riemannian symmetric R-spaces*, Osaka J. Math. **21** (1984), 733–764.

[15] M. Takeuchi, *Parallel submanifolds of space forms*, in: Manifolds and Lie Groups, Birkhäuser, Boston, 1981, pp. 203–215.