対称空間上の等径関数とベクトル束

高橋 正郎（久留米工業高等専門学校）

この講演は，長友 康行 氏（明治大学），福岡 敬真 氏 との共同研究によるものです．

我々は，ベクトル束を使って部分多様体の微分幾何的な性質を調べている．この講演では，ベクトル束を使っての対称空間上の等径関数を組織的な構成，対応する超曲面の性質を報告する．

1　準備

1.1　等径関数

ベクトル値等径関数を定義する．我々は，Terng [5] の定義でなく，Wang ([6]，[1, p.55]) の定義を使う．

定義 1　$f=(f_1,\cdots,f_k):M\to\mathbf{R}^k$ を Riemann 多様体 (M,g_M)．上のベクトル値関数とする．f に対して，次の条件を満たす関数 $F_{ij},G_i:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ $(1\leqq i,j\leqq k)$ が存在するとき，f を**等径関数**という．

$$(1)\ g_M(df_i,df_j)=F_{ij}(f_1,\cdots,f_k)\quad (2)\ \Delta f_i=G_i(f_1,\cdots,f_k).$$

この定義は Terng の定義より弱いことを注意しておく．$k=1$ のとき，これは通常の等径関数である．$k=1$ のとき，等径関数の等位集合 $f^{-1}(c)\quad (c\in\mathbf{R})$ を**等径超曲面**という．

1.2　対称空間と表現に関する準備

我々が考える設定を述べる．(G,K) はコンパクト型の既約対称対とし．G と G/K は単連結とする．$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ をそれぞれ，G，K の Lie 環とし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$：を Cartan 分解（標準分解）を表す．$G$ の既約表現空間 $\varrho:G\to\mathrm{GL}(W)$ に G 不変内積を一つ固定し，$W=U\oplus V$：K 不変な直交分解とする．

この分解が $\dim V\neq 0$ かつ $\dim U\neq 0$ で，$\varrho(\mathfrak{m})U\subset V$ かつ $\varrho(\mathfrak{m})V\subset U$．をみたすとき，この分解を**一般化された Cartan 分解**と呼ぶ．（係数体を区別するときは，実数体のとき，一般化された実 Cartan 分解複素数のとき一般化された複素 Cartan 分解と呼ぶ.）

このとき，

$$G/K\to Gr_p(W),\ \ gK\mapsto\varrho(g)U$$

によって，G/K は $Gr_p(W)$ の部分多様体とみなすことができる．ここで，$p=\dim U$ である．

$Gr_p(W)$ には，W の内積から与えられる Riemann 計量をいれる．そして，G/K の Riemann 計量は，上の写像が等長写像になるように与える．このとき，G/K は $Gr_p(W)$ の全測地的部分多様体になることがわかる．

次に，ベクトル束 $\mathbf{U}=G\times_K U$ と $\mathbf{V}=G\times_K V$ に標準不変接続を与えて考える．$w\in W$，$g\in G$，$[g]\in G/K$．に対して，

$$s([g]):=\left[g,\pi_U(g^{-1}w)\right],\quad t([g]):=\left[g,\pi_V(g^{-1}w)\right],$$

として，$\mathbf{U}$ の切断 s と $\mathbf{V}$ の切断 t を与える．この切断を $w \in W$ **に対応する切断**と呼ぶ．ここで，π_U，π_V は，それぞれ，W から U，V への直交射影とする．

次に，

$$f = ([g]) = |s|^2([g]) \quad g \in G$$

として，G/K 上の関数 f を定義する．そして，$S_0 \subset G/K$：f を零点集合，$S_M \subset G/K$：f を最大値集合とし，H：$w \in G$ の G イソトロピー部分群とする．つまり，$H = \{g \in G | \varrho(g)w = w\}$ とする．

定義 2　G の表現 $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ について，W における主軌道 (principal orbit) が W の超球になるとき，この表現を**球面型の表現**と呼ぶ．

このような表現は Hsing-Hsiang [2] により分類されている．

以下，表現 $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ は球面型とする．球面型とすると，$w \in U \subset W$ としても一般性を失わないので，$w \in U$，$|w| = 1$ とする．また，球面型の表現の中で，$W = U \oplus V$ と K 不変部分空間に分解したとき，$\dim U \neq 0$，$\dim V \neq 0$ となるもののみを考える．すると，次のことがわかる．

補題 3
(1)　U，V は K 既約である．
(2)　$W = U \oplus V$ は一般化された Cartan 分解である．
(3)　S_0 と S_M は G/K の全測地的部分多様体である．

以下，このような，G/K，W 等を分類した表である．

G/K	W	H	$U \oplus V$	S_0, S_M
$\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$	$\mathbf{C}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)$	$\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)/\mathrm{SO}(n-1)$
$Gr_p(\mathbf{C}^n)$	$\mathbf{C}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)$	$\mathbf{C}^p \oplus \mathbf{C}^q$	$Gr_p(\mathbf{C}^{n-1})$, $Gr_{p-1}(\mathbf{C}^{n-1})$
$Gr_p(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$	$\mathrm{Spin}(n-1)$	$\mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$	$Gr_p(\mathbf{R}^{n-1})$, $Gr_{p-1}(\mathbf{R}^{n-1})$
S^{n-1}	$\mathbf{R}^n$	$\mathrm{Spin}(n-1)$	$\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^{n-1}$	S^{n-1}, 2points
$Gr_4(\mathbf{R}^7)$	S_7	G_2	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$	$G_2/\mathrm{SO}(4)$, $G_2/\mathrm{SO}(4)$
$Gr_4(\mathbf{R}^8)$	$S_8^{\pm}$	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$	$Gr_4(\mathbf{R}^7)$, $Gr_3(\mathbf{R}^7)$
$Gr_4(\mathbf{R}^9)$	S_9	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathbf{R}^8 \oplus \mathbf{R}^8$	$Gr_4(\mathbf{R}^7)$, $Gr_3(\mathbf{R}^7)$
$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$	$\mathbf{C}^{2n}$	$\mathrm{Sp}(n-1)$	$\mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^{n^*}$	$\mathrm{Sp}(n-1)/\mathrm{U}(n-1)$
$Gr_p(\mathbf{H}^n)$	$\mathbf{H}^n$	$\mathrm{Sp}(n-1)$	$\mathbf{H}^p \oplus \mathbf{H}^q$	$Gr_p(\mathbf{H}^{n-1})$, $Gr_{p-1}(\mathbf{H}^{n-1})$
$G_2/\mathrm{SO}(4)$	$\mathbf{R}^7$	$\mathrm{SU}(3)$	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^3$	$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$, $\mathbf{C}P^2$

この表で，S_n は $\mathrm{Spin}(n)$ の spin 表現，$S_n^{\pm}$ は $\mathrm{Spin}(n)$ の half-spin 表現を表す．

2　等径関数

先程の分類にしたがって，個々に調べていく．その前に，次の補題を述べておく．

補題 4　H の G/K への作用が cohomogeneity one ならば，f は等径関数である．

先程の分類表で，次の 3 つを除き，cohomogeneity one である．

$$(\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n), \mathbf{C}^n), \quad \left(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), \mathbf{C}^{2n}\right), \quad \left(Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9\right).$$

この 3 つについて，それぞれの cohomogenity は，順に，2, 3 and 2 である．

まず，cohomogenity 1 のとき，この等径関数による，等径部分多様体の主曲率を述べる．なお，$(Gr_4(\mathbf{R}^8), S_8^{\pm})$ のときは，$(Gr_4(\mathbf{R}^8), \mathbf{R}^8)$ と同様なので省略する．

(1) $\big(Gr_p(\mathbf{R}^N), \mathbf{R}^N\big)$,

定理 5　関数 f の正則な等位集合 $f^{-1}(c)$ の主曲率は

$$\frac{|s|}{|t|}, \quad -\frac{|t|}{|s|}, \quad 0,$$

となり，重複度は，それぞれ，$q-1$, $p-1$, $(p-1)(q-1)$ である．

(2) $\big(Gr_p(\mathbf{C}^N), \mathbf{C}^N\big)$,

定理 6　関数 f の正則な等位集合 $f^{-1}(c)$ の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{2}|s||t|}(|s|^2-|t|^2), \quad \frac{|s|}{\sqrt{2}|t|}, \quad -\frac{|t|}{\sqrt{2}|s|}, \quad 0,$$

となり，重複度は，それぞれ，1, $2(q-1)$, $2(p-1)$, $2(p-1)(q-1)$ である．

(3) $\big(Gr_p(\mathbf{H}^N), \mathbf{H}^N\big)$,

定理 7　関数 f の正則な等位集合 $f^{-1}(c)$ の主曲率は

$$\frac{1}{2|s||t|}(|s|^2-|t|^2), \quad \frac{|s|}{2|t|}, \quad -\frac{|t|}{2|s|}, \quad 0,$$

となり，重複度は，それぞれ，3, $4(q-1)$, $4(p-1)$, $4(p-1)(q-1)$ である．

(4) $\big(Gr_4(\mathbf{R}^7), S_7\big)$,

定理 8　関数 f の正則な等位集合 $f^{-1}(c)$ の主曲率は

$$\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{1}{|s||t|}\left\{3(|s|^2-|t|^2) \pm \sqrt{9-4|s|^2|t|^2}\right\}, \quad 0,$$

となり，重複度は，それぞれ，3, 3, 5 である．

(5) $\big(G_2/\mathrm{SO}(4), \mathbf{R}^7\big)$,

定理 9　関数 f の正則な等位集合 $f^{-1}(c)$ の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{|s||t|}\left\{(|s|^2-|t|^2) \pm \sqrt{1-|s|^2|t|^2}\right\}, \quad -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{|t|}{|s|}, \quad 0,$$

となり，重複度は，それぞれ，2, 2, 1 and 2 である．

3　cohomogenity が 2 以上のとき

このとき，f は等径関数にはならない．しかし，他のベクトル束から与えられる関数を使うと，$\mathbf{R}^k$ 値等径関数を得られる．これから，等径関数を得ることができる．

(6) $(\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n), \mathbf{C}^n)$

$\mathbf{C}^n$ の一般化された Cartan 分解は, $z = x+iy \in \mathbf{R}^n \oplus i\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$ となるので, $\mathbf{V} = \mathrm{SU(n)} \times_{\mathrm{SO}(n)} \mathbf{R}^n$ と $\mathbf{U} = \mathrm{SU(n)} \times_{\mathrm{SO}(n)} \mathbf{R}^n$ を自然に同一視する．その上で,

定理 10 $F := \left(|s|^2 - |t|^2, 2g_U(s,t)\right)$. とおくと，$F$ は $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ 上の $\mathbf{R}^2$ 値の等径関数である．また，$\tilde{f} = |F|^2 = \left(|s|^2 - |t|^2\right)^2 + 4g_U(s,t)^2$ とおくと，$\tilde{f}$ は $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ の通常の意味の等径関数である．

定理 11 関数 $\tilde{f}$ の正則な等位集合 $\tilde{f}^{-1}(\cos^2 2\theta)$ の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\theta, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}\,\tan\theta}, \quad \sqrt{2}\,\tan 2\theta, \qquad 0,$$

となり，重複度は，それぞれ，$n-2$, $n-2$, 1, $\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$ である．

このとき，$\mathrm{SO}(n)$ より大きい $\mathrm{SU}(n)$ の部分群があり，$\tilde{f}$ はその群の作用で不変な関数である．また，$\mathrm{SO}(n)$ の $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ への作用は hyperpolar にならず，F の正則値 c に対する等位集合 $F^{-1}(c)$ は equifocal submanifold にならない

(7) $\left(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), \mathbf{C}^{2n}\right)$

$\mathbf{C}^{2n}$ の一般化された Cartan 分解は，$\mathbf{C}^{2n} = \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^{\mathbf{n}*}$ となるので，$\mathbf{V} = \mathrm{Sp}(n) \times_{\mathrm{U(n)}} C^{n*}$ は $\mathbf{U} = \mathrm{Sp}(n) \times_{\mathrm{U(n)}} C^n$ の双対束になる．その上で,

定理 12 $F := \left(|s|^2 - |t|^2, 2(s,t)\right)$. とおくと, F は $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ 上の $\mathbf{R}^3$ 値の等径関数である．ここで, (s,t) は双対性を表す内積である．また，$\tilde{f} = |F|^2 = \left(|s|^2 - |t|^2\right)^2 + 4|(s,t)|^2$ とおくと，$\tilde{f}$ は $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ の通常の意味の等径関数である．

定理 13 関数 $\tilde{f}$ の正則な等位集合 $\tilde{f}^{-1}(\cos^2 2\theta)$ の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\theta, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}\tan\theta}, \quad \sqrt{2}\tan 2t, \quad -\frac{\sqrt{2}}{\tan 2\theta}, \quad 0,$$

となり，重複度は，それぞれ，$2n-4$, $2n-4$, 2, 1, n^2-3n+4, である．

このとき，$\mathrm{U}(n)$ より大きい $\mathrm{Sp}(n)$ の部分群があり，$\tilde{f}$ はその群の作用で不変な関数である．また，$\mathrm{U}(n)$ の $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ への作用は hyperpolar にならず，F の正則値 c に対する等位集合 $F^{-1}(c)$ は equifocal submanifold にならない

(8) $\left(Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9\right)$

$S_9 = S_4^+ \otimes S_5 \oplus S_4^- \otimes S_5$ なので，$U = \mathbf{R}^8 = S_4^+ \otimes S_5$ $V = \mathbf{R}^8 = S_4^- \otimes S_5$ とする．すると,

$$U \otimes V = \mathbf{R}^4 \otimes \left(\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^5 \oplus \mathfrak{so}(5)\right),$$

となる．π_0 を直交射影とする．$\pi_0 : U \otimes V \to \mathbf{R}^4$

このときも，$f = |s|^2$ は等径関数ではないが，$\tilde{f} := |\pi_0(s \otimes t)|^2$ は等径関数になる．

定理 14 $F := \left(|s|^2 - |t|^2, \tilde{f}\right)$. とおくと，$F$ は $Gr_4(\mathbf{R}^9)$ 上の $\mathbf{R}^2$ 値の等径関数である．

このとき，$\mathrm{Spin}(7)$ の $Gr_4(\mathbf{R}^9)$ への作用は hyperpolar にならず，F の正則値 c に対する等位集合 $F^{-1}(c)$ は equifocal submanifold にならない

4 Radon 変換

我々の考えている場合，G は $\pi : G \to G/K$ と $\psi : G \to H\backslash G$ と二つの fibration をもつ．

球面型の表現 W を考えているので，$H\backslash G$ は W の超球になることを注意しておく．

次に，$d\mu$ H の正規化された Haar 測度とする．$d\mu$ が誘導する $\psi : G \to H\backslash G$ のファイバーの測度も $d\mu$de で表す．このとき，G/K 上の任意の関数に対する *Radon* **変換** $R : C^\infty(G/K) \to C^\infty(H\backslash G)$ を

$$R(f)(x) = \int_{\psi^{-1}(x)} \pi^* f d\mu, \quad x \in H\backslash G.$$

で定義する．この Radon 変換により，我々の等径関数は球面上の等径関数を導く．

定理 15 H の G/K への作用が cohomegenity one のとき，$\tilde{f} = |s|^2 - \frac{p}{N}$ $(p = \dim U)$ とすると，$R(\tilde{f})$ は W の単位超球の等径関数になる．固有値の重複度は 2 である．

実際，今の場合は，

$$R(\tilde{f}) = \frac{1}{N}\left\{ q\sum_{i=1}^{p} x_i(g^{-1}w)^2 - p\sum_{\alpha=p+1}^{N} x_\alpha(g^{-1}w)^2 \right\}.$$

となる．

定理 16 H の G/K への作用が cohomegenity two 以上のとき，$\tilde{f}$ の Radon 変換 $R(\tilde{f})$ は W の単位超球の等径関数になる．固有値の重複度は 4 である．

この場合も具体的に関数を書くことができる．SU(n)/SO(n) のときは，野水先生の等径関数 [4] になる．また，出てきた球面の等径超曲面はすべて等質になっている．

参考文献

[1] J.Eells and A.Ratto, Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries, Ann.Math.Studies **130**, Princeton University Press, Princeton (1993)

[2] W.C Hsiang and W.Y. Hsiang, *Differential actions of compact connected classical groups: II*, Ann. of Math. **92** (1970), 189–223

[3] Y.Nagatomo and M.Takahashi, *Vector bundles, isoparametric functions and Radon transforms on symmetric spaces*, Osaka J. Math. **56**(2019), 675-711

[4] K.Nomizu, *Some Results in E.Cartan's Theory of Isoparametric Families of Hypersurfaces*, Bull.A.M.S. **79** (1973), 1184–1188

[5] C.-L.Terng, Isoparametric Submanifolds and Their Coxeter Groups, J. Diff. Geom. **21** (1985), 79-107

[6] Q.-M. Wang, *Isoparametric maps on Riemannian manifolds and their applications*, Adv. in Sci. of China Math. **2** (1987), 79–103