

八元数、 G_2 、対蹠集合、および Fano 平面

田崎博之

(筑波大学)

田中真紀子さん保倉理美さんとの共同研究

湯沢 2019

2019年11月29日

例外型コンパクト Lie 群 G_2 の八元数の自己同型群としての実現を利用して、 G_2 の極大対蹠部分群の具体的な記述を共同研究者の保倉さんが湯沢 2016 で発表した。今回はその具体的な記述をより直接的に示す。さらに、 G_2 の極地として実現できる例外型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ の極大対蹠集合と有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の極大対蹠集合の関係を明らかにし、その観点から八元数の演算表に二元体上の射影平面である Fano 平面が現れる理由を説明する。

G_2 を八元数 O の自己同型群として記述するため、まず八元数の積の定め方を復習しておく。四元数体を H で表す。 $O := H \times H$ とおき、次式で O の元の積を定める。

$$(m, a)(n, b) = (mn - \bar{b}a, a\bar{n} + bm) \quad ((m, a), (n, b) \in O)$$

実ベクトル空間 V の正則線形変換全体の成す一般線形群を $GL_R(V)$ で表す。

$$\text{Aut}(O) := \{\alpha \in GL_R(O) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \ (x, y \in O)\}$$

とおくと、 $\text{Aut}(O)$ は G_2 型の連結コンパクト Lie 群であることがわかる。これを簡単に G_2 で表す。写像 $\psi : Sp(1)^2 \rightarrow GL_R(O)$ を

$$\psi(p, q)(m, a) := (qm\bar{q}, pa\bar{q}) \quad ((p, q) \in Sp(1)^2, (m, a) \in O)$$

と定めると、 ψ の像は G_2 に含まれ、 ψ は $Sp(1)^2$ から G_2 への Lie 群の準同型写像になる。 $\ker \psi = \{\pm(1, 1)\}$ となり、 G_2 における $\gamma := \psi(1, -1)$ の中心化群 $Z_{G_2}(\gamma) = \{g \in G_2 \mid g\gamma g^{-1} = \gamma\}$ は

$$Z_{G_2}(\gamma) = \psi(Sp(1)^2) \cong Sp(1)^2 / \{\pm(1, 1)\} \cong SO(4)$$

を満たすことがわかる (Yokota[Yo])。 $\psi(Sp(1)^2)$ を簡単に $SO(4)$ と書くことにする。 $\gamma^2 = e$ となり、軌道 $\{g\gamma g^{-1} \mid g \in G_2\} \cong G_2/SO(4)$ は対称空間になる。

M をコンパクト Riemann 対称空間とする。各 $x \in M$ の点対称を s_x で表す。 M の部分集合 A の任意の元 x, y について $s_x(y) = y$ が成り立つとき、 A を M の対蹠集合という。さらに、 M の対蹠集合の内、包含関係で極大なものを M の極大対蹠集合と呼ぶ。さらに元の個数が最大の対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ。大対蹠集合の元の個数を M の 2-number といい、 $\#_2 M$ で表す。集合 X の変換 f の不動点集合を $F(f, X)$ で表す。 $F(s_x, M)$ の各連結成分を極地と呼ぶ。極地は一点または全測地的部分多様体になる。これらは Chen-Nagano [CN1], [CN2] の導入した概念である。極地を調べることが対蹠集合を調べることの手がかりになる。

極大対蹠集合の例を挙げておく。 R^{n+1} の原点を中心とし半径 r の n 次元球面 $S^n(r)$ の場合、 $x \in S^n(r)$ に対して $\{\pm x\}$ は極大対蹠集合になる。 $S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$ の場合、 $x \in S^{n_1}(r_1)$ と $y \in S^{n_2}(r_2)$ に対して $\{(\pm x, \pm y)\}$ は極大対蹠集合になる。 $(S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2))/\{\pm 1\}$ の場合は、 R^{n_1+1} の直交基底 x_1, \dots, x_{n_1+1} と R^{n_2+1} の直交基底 y_1, \dots, y_{n_2+1} をとると

$$\{[x_1, \pm y_1], \dots, [x_k, \pm y_k]\}$$

は極大対蹠集合になる。ここで、 $k = \min\{n_1, n_2\} + 1$ である。

G がコンパクト Lie 群のとき、 G には両側不変 Riemann 計量が存在し、それに関して G は Riemann 対称空間になる。 $x \in G$ における点対称 s_x は

$$s_x(y) = xy^{-1}x \quad (y \in G)$$

と表すことができ、点対称を代数的に表現できる。コンパクト Lie 群を Riemann 対称空間とみなすことにより、その代数構造を幾何学的観点から調べることができる。単位元 e を含む G の極大対蹠集合は有限 Abel 部分群になり、 \mathbb{Z}_2 のいくつかの積 $\mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$ に同型になることがわかる。コンパクト Lie 群の場合には、極大対蹠集合を調べるにはこのような極大対蹠部分群を調べればよいことになる。極大対蹠部分群を求めるには

$$F(s_e, G) = \{x \in G \mid x^2 = e\}$$

を調べることが重要になる。 G が連絡の場合には $F(s_e, G)$ を次のように求めることができる。 T を G の極大トーラスとする。

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

が成り立つので、

$$F(s_e, G) = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1} \cap F(s_e, G) = \bigcup_{g \in G} gF(s_e, T)g^{-1}.$$

$F(s_e, T)$ を求めれば、 $F(s_e, T)$ に共役な元の全体として $F(s_e, G)$ を求めることができる。さらに $F(s_e, G)$ から G の極大対蹠部分群が得られる。

A を G の極大対蹠部分群とする。 $x (\neq e) \in A \cap F(s_e, G)$ をとると、 A は Abel 群であることから、 A は x の G における中心化群 $Z_G(x)$ に含まれる。 A は G の極大対蹠部分群なので、 $Z_G(x)$ の極大対蹠部分群でもある。 これにより、 G の極大対蹠部分群の分類は $F(s_e, G)$ の各元 x に対する $Z_G(x)$ の極大対蹠部分群の分類に帰着する。 今回はこの方針で G_2 の極大対蹠部分群の分類を与える。 これは湯沢 2016 での保倉さんの講演の分類の方針とは異なる。 また、湯沢 2015 で私が行った古典型コンパクト Lie 群およびその商群の極大対蹠部分群の分類に関する解説の分類の方針とも異なる。 コンパクト Lie 群に応じて極大対蹠部分群の分類の適切な手法は異なるようである。

これ以降は G_2 の極大対蹠部分群の分類を考える。 $G_2 \supset \psi(Sp(1)^2) \cong SO(4)$ はどちらもコンパクト Lie 群としての階数は 2 である。 $T = \{\psi(e^{is}, e^{it}) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ とおくと、 T は $\psi(Sp(1)^2)$ と G_2 の極大トーラスになる。 すでに示した一般論より

$$F(s_e, G_2) = \bigcup_{g \in G_2} gF(s_e, T)g^{-1}$$

が成り立つ。 ψ の定義より具体的に計算すると

$$F(s_e, T) = \{\psi(1, \pm 1), \psi(i, \pm i)\}$$

がわかる。 $\psi(1, 1) = e$ であり、 $\psi(1, -1) = \gamma$ とおいたので

$$F(s_e, G_2) \setminus \{e\} = \bigcup_{g \in G_2} g\{\gamma, \psi(i, \pm i)\}g^{-1}$$

となる。 他方、Yokota[Yo] より

$$S_{(i,0)}(G_2) = \{g \in G_2 \mid g(i, 0) = (i, 0)\} \cong SU(3)$$

が成り立ち、 $\gamma, \psi(i, \pm i) \in S_{(i,0)}(G_2)$ がわかる。 $F(s_e, SU(3)) \setminus \{e\}$ は単一の軌道であることが行列の計算によってわかる。 したがって、

$$\bigcup_{g \in S_{(i,0)}(G_2)} g\{\gamma, \psi(i, \pm i)\}g^{-1} = \{g\gamma g^{-1} \mid g \in S_{(i,0)}(G_2)\}$$

であり、

$$F(s_e, G_2) \setminus \{e\} = \bigcup_{g \in G_2} g\{\gamma, \psi(i, \pm i)\}g^{-1} = \{g\gamma g^{-1} \mid g \in G_2\}$$

となり、 $F(s_e, G_2) \setminus \{e\}$ は連結になる。 A を G_2 の極大対蹠部分群とする。 必要なら A を共役なものに取り換え $\gamma \in A$ とできる。 A は Abel 群なので、 $A \subset Z_{G_2}(\gamma) = \psi(Sp(1)^2)$ となる。 $\psi(Sp(1)^2)$ は球面の積からの二重被覆で得られるので、極大対蹠集合は $\Psi = \{\psi(p, \pm p) \mid p = 1, i, j, k\}$ に合同になる。 よって、 A は Ψ に共役に

なる。さらに G_2 の極大対蹠部分群は共役を除いて Ψ のみであることもわかる。以上より $\#_2 G_2 = 2^3$ である。 $\Psi \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ なので、 G_2 の極大対蹠部分群 Ψ は G_2 の極大トーラスに収まらない。そこで、 $M_1^+ = F(s_e, G_2) \setminus \{e\}$ とおくと、

$$F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+, \quad M_1^+ = \{g\gamma g^{-1} \mid g \in G_2\} \cong G_2/SO(4)$$

と書ける。これらより、 M_1^+ の極大対蹠集合は合同を除いて

$$\Psi_1 = \{\gamma, \psi(i, \pm i), \psi(j, \pm j), \psi(k, \pm k)\}$$

のみである。したがって、 $\#_2 M_1 = 7$ である。 $F(s_\gamma, M_1^+)$ の $\{\gamma\}$ 以外の連結成分も唯一つであり、それを $M_{1,1}^+$ とおくと、

$$F(s_\gamma, M_1^+) = \{\gamma\} \cup M_{1,1}^+, \\ M_{1,1}^+ = \{\psi(p, q) \in \psi(Sp(1)^2) \mid p^2 = q^2 = -1\} \cong (S^2 \times S^2)/\{\pm(1, 1)\}$$

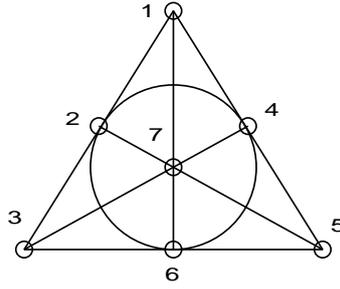
が成り立つ。 $M_{1,1}^+$ の極大対蹠集合は $\{\psi(i, \pm i), \psi(j, \pm j), \psi(k, \pm k)\}$ に合同になることもわかる。したがって、 $\#_2 M_{1,1} = 6$ である。

O の積は結合律を満たさないが、結合律を満たす 4 次元部分空間が存在し四元数 H と同型になる。結合律を満たす部分空間は 1 を含むのでその直交補空間で定まり、直交補空間は $\text{Im} O = \text{Im} H \times H$ に含まれる。そこで、これらを $\tilde{G}_{\text{ass}}(\text{Im} O)$ と表す。この各元は $\text{Im} O$ の実 3 次元部分空間であるが、積演算により自然に向きが定まる。よって、 $\tilde{G}_{\text{ass}}(\text{Im} O)$ は $\mathbb{R}^7 = \text{Im} O$ 内の有向 3 次元部分空間全体の成す有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の部分多様体とみなせる。 $\tilde{G}_{\text{ass}}(\text{Im} O)$ には G_2 が推移的に作用し、 $\text{Im} H$ におけるイソトロピー部分群は $SO(4)$ になる。よって、 $\tilde{G}_{\text{ass}}(\text{Im} O) \cong G_2/SO(4)$ が成り立つ ([HL])。さらに $\tilde{G}_{\text{ass}}(\text{Im} O) \subset \tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ は全測地的部分多様体になる。(四元数構造に関する四元数部分多様体になっている。) 特に $\tilde{G}_{\text{ass}}(\text{Im} O)$ の対蹠集合は $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の対蹠集合になる。

$\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の対蹠集合についてはすでに次のことがわかっている。[7] を 1 から 7 までの整数の集合とし、 $\binom{[7]}{3}$ を [7] 内の 3 点からなる部分集合の全体とする。部分集合 $A \subset \binom{[7]}{3}$ の任意の α, β について差集合の元の個数 $|\alpha \setminus \beta|$ が偶数になるとき、 A を $\binom{[7]}{3}$ の対蹠集合という。 e_1, \dots, e_7 を \mathbb{R}^7 の正規直交基底とする。 $\binom{[7]}{3}$ の極大対蹠集合 A に対して

$$\{\pm \langle e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3} \rangle \mid \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in A\}$$

は $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の極大対蹠集合になる。ここで、 $\pm \langle e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3} \rangle$ は $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}$ の張る 3 次元部分空間の両方の向きを考えたものである。逆に $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の任意の極大対蹠集合はこの形のものに合同になる。さらに、 $\binom{[7]}{3}$ の極大対蹠集合は二元体上の射影平面である Fano 平面の直線全体と同等なもののみである。以上は [T] の結果である。下図の線分および円上の 3 点集合全体が Fano 平面の直線である。



Fano 平面の点の個数と直線の個数はどちらも 7 である。 $M_1^+ \cong \tilde{G}_{\text{ass}}(\text{Im}O)$ の極大対蹠集合 $\Psi_1 = \{\gamma, \psi(i, \pm i), \psi(j, \pm j), \psi(k, \pm k)\}$ も 7 点集合であり、 Ψ_1 の各元の両方の向きのもを集めた $\{\pm a \mid a \in \Psi_1\}$ は $\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)$ の極大対蹠集合になる。したがって、 Ψ_1 は上記の Fano 平面から定まり、Fano 平面の形から \mathcal{A} には $\text{Im}O$ の基底のすべての 7 つの元が現れ、それらの任意の 2 元を含む部分集合が \mathcal{A} に存在する。したがって、 \mathcal{A} は O の演算を定め、それが Fano 平面によって定まっている。これが O の演算表に Fano 平面が現れる理由である。

参考文献

- [CN1] Chen, B.-Y. and T. Nagano, Un invariant geometrique riemannien, C. R. Acad. Sci. Paris Math. **295** (1982), 389–391.
- [CN2] Chen, B.-Y. and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.
- [HL] R. Harvey and H. B. Lawson, Calibrated geometries, Acta Math. **148**(1982), 47–157.
- [T] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, Internat. J. Math. **24**(2013), Article ID: 1350061, 28 pp.
- [Yo] Yokota, I., Exceptional Lie groups, arXiv:0902.0431v1 [math.DG] 3 Feb 2009, e-print.