曲線折りの異性体

梅原雅顕（東工大・情報理工学院）

最近の本田氏（横浜国大）・直川氏（広島工大）・佐治氏（神戸大）・山田氏（東工大）との折り紙に関する研究の紹介です.

1. 可展面の双対性

δ を正数とし $I := [-\delta, \delta]$ とおく. $\boldsymbol{c}(t)$ $(t \in I)$ を $\boldsymbol{R}^3$ 内の自己交叉を持たない空間曲線とし, 簡単のため t は弧長パラメータとする. この空間曲線の曲率関数 $\kappa(t)$ は零点を持たないとする. また, 曲線の像 $\boldsymbol{c}(I)$ の像に向きをつけたものを C で表す. C^∞-写像 $f : I \times (-\epsilon, \epsilon) \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(t,v) := \boldsymbol{c}(t) + v\xi(t) \qquad (t \in I,\ |v| < \epsilon),$$
$$\xi(t) := \cos\beta(t)\boldsymbol{e}(t) + \sin\beta(t)\Big(\cos\alpha(t)\boldsymbol{n}(t) + \sin\alpha(t)\boldsymbol{b}(t)\Big),$$

と定義する. 但し

$$0 < |\alpha(t)| < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \beta(t) < \pi \qquad (t \in I)$$

とする. ここで $\alpha(t)$ を**第一角度関数**, $\beta(t)$ を**第二角度関数**という. f が可展面（つまりガウス写像が恒等的に零）であるための必要充分条件は

$$\cot\beta(t) = \frac{\alpha'(t) + \tau(t)}{\kappa(t)\sin\alpha(t)}.$$

で与えられる. また f の第一基本形式は

$$ds^2 = \left(\Big(\sin\beta - v(\beta' + \mu_f)\Big)^2 + \cos^2\beta\right)dt^2 + 2\cos\beta dt dv + dv^2$$

で表される, 但し $\mu_f(t) := \kappa(t)\cos\alpha(t)$ は空間曲線 C に沿う可展面 f 上の曲面としての測地的曲率となる. 可展面 f は 第一角度関数 $\alpha(t)$ で一意に決まってしまうので $f = f^\alpha$ と記す. すると

$$\check{f} = f^{-\alpha},$$

も, C に沿う可展面となるが, これを f の**双対可展面**とよぶ. $\hat{f}$ の第二角度関数は

$$\cot\check{\beta}(t) = \frac{\alpha'(t) - \tau(t)}{\kappa(t)\sin\alpha(t)}$$

を満たす. 双対可展面 $\check{f}$ は, 以下の性質をもつ.

- $\check{f}$ は, 曲線 C に沿う可展面で C は $\check{f}$ 上の曲線と思ったとき, その測地的曲率 $\mu_{\hat{f}}$ は 上記の μ_f に一致する.

図 1 左は, 常螺旋に沿う第一角度関数が一定である可展面とその双対である. この場合, 2 つは合同だが, 一般に, 可展面の双対は, 互いに非合同で異なる第一基本形式をもつ.

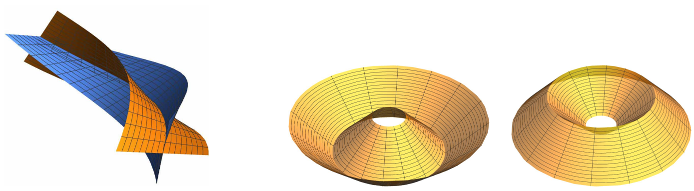


図 1. 常螺旋に沿う可展面とその双対, および 2 つの互いに双対な「曲線折り」

2. 折り紙写像

前節で定義した可展面 f とその双対 $\check{f}$ を用いて

$$\varphi_f(t,v) := \begin{cases} f(t,v) & (v \geq 0), \\ \check{f}(t,v) & (v < 0) \end{cases}$$

によって定まる写像を f が誘導する**折り紙写像** という．ここで,「曲線折り」を定義する．

定義 2.1. いま

- 紙（つまり平面 $\boldsymbol{R}^2$）を用意する．
- 変曲点のない[1]弧長パラメータで表示された正則曲線 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^2$ の像を Γ と記す.（とくに Γ は C と同じ長さである.）
- Γ には，γ が誘導する向きも付随しているものとする．
- Γ を折り目として，紙を折り，その折り目が作る空間曲線がちょうど C であるようにする．特に γ の曲率は，空間曲線が「曲線折り」を定める曲面 $f, \check{f}$ 上の曲面と思ったときの測地的曲率 μ_f に一致する．

このとき，作られた折り紙の C の近傍を**曲線折り**といい Γ を **crease patten** といい，C を **crease** とよぶ.

このような折り方が可能になるためには,

(1) Γ と C は同じ長さをもっており，かつ
(2) $\gamma(t)$ の曲率関数 $\mu(t)$ の絶対値が，$\boldsymbol{c}(t)$ の空間曲線としての曲率関数 $\kappa(t)$ 以下である．

必要がある．ただ $|\mu(t)| = \kappa(t)$ のときは，うまく折れない場合があることがわかっている．よって， $\mu(t)$ は以下の条件を満たしている．

$$(*) \qquad 0 < \mu(t) < \kappa(t) \qquad (t \in I).$$

以下のことが知られている．

事実 2.2. ([1]) Γ が条件 $(*)$ を満たすとき，この平面曲線を crease pattern とし，C を crease としてもつ「曲線折り」はある可展面 f から作られる折り紙写像 φ_f の像として実現される．このとき，$\varphi_{\check{f}}$ も,「曲線折り」として，$\varphi_{\check{f}}$ と同じ crease pattern をもつ．ここで第二角度関数 $\beta, \check{\beta}$ は，紙の上での曲線 Γ の左右における線織面の線となる方向を指し示す．

つまり,「曲線折り」は常にもう一つの「曲線折り」を同伴し，両者の crease と crease pattern は同一である．一般には２つの折り方は，合同ではないが円に沿って，等角度で折った場合が図１（中央と右）で，２つの曲線折りは像としては一致するが，互いに合同である．

3. もう二つの「曲線折り」

前節で，１つの曲線折りに対して，それと同一の crease と crease pattern が存在することを示したが, 以下の問いが自然に生じる．

(問) 与えられた「曲線折り」と（向きを考慮に入れずに）同一の crease と crease pattern をもつ「曲線折り」で互いに合同でないものを「異性体」とよぶことにすると,「異性体」は，一般にいくつあるだろうか？

この答として，Γ に $(*)$ よりも少し強い仮定

$$(**) \qquad 0 < \mu(t) < \min_{t \in I} \kappa(t) \qquad (t \in I)$$

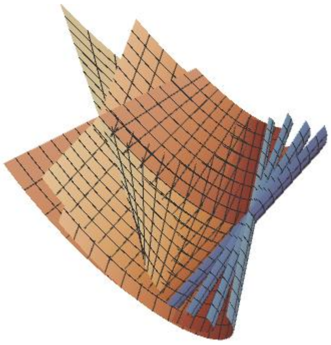
を課す．今回，以下の結果を得た．

定理 3.1 (本田-直川-佐治-山田-梅原 [2])**.** 条件 $(**)$ を満たす Γ に対して「曲線折り」の異性体の可能性は４つである．また，実際，４つが全部非合同となるような C と Γ の具体例が存在する．

[1] 変曲点があると，折り方に制限があるため，ここではこの仮定をつけている．

調べたところ，４つの可能性については，我々の研究以前に指摘されたことはないようである．証明は，f とその双対が C の向きに依存していることに着目する．C の向きを反転させて，もう２つの C に沿う可展面で，その C に沿う測地的曲率関数が Γ に一致するようにできる，ということを示す．

この定理は f は開いた帯であるが，もしも C が閉曲線のときは，Γ と C の始点を合わせる自由度があるため，無限個の異性体ができる．詳しくは [3] をみよ．また [3] では，異性体が４個できるための (Γ, C) の必要充分条件も決定している．下図は，４つの異なる可展面で，同じ曲線に沿い，かつ同じ測地的曲率をもつものの例で，曲線に沿う平均曲率関数も図示している．４つが合同でないことは，このグラフから読み取れる．(４つの曲面の像は，そのまま４つの異なる「曲線折り」の像に一致する．)



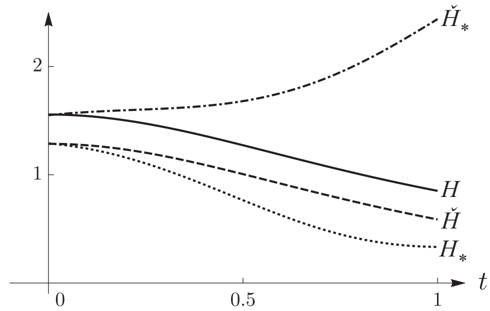


図 2. C に沿って同じ測地的曲率をもつ４つの可展面と，C 上の平均曲率

参考文献

[1] D. Fuchs and S. Tabachnikov, *More on paper folding*, The American Mathematical Monthly, **106** (1999), 27–35.

[2] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Curved foldings with common creases and crease patterns*, preprint (arXiv:1910.06533).

[3] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *On the existence of four or more curved foldings with common creases and crease patterns* , preprint (arXiv:1911.07166).